

**EVALUACIÓN DE RENDIMIENTO DE ESTIMADORES NO LINEALES BASADOS
EN LA APLICACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN A SEÑALES BIOMECÁNICAS**

MANUEL ANDRÉS VÉLEZ GUERRERO

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA
TUNJA
2016**

EVALUACIÓN DE RENDIMIENTO DE ESTIMADORES NO LINEALES BASADOS
EN LA APLICACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN A SEÑALES BIOMECÁNICAS

PRESENTADO POR
MANUEL ANDRÉS VÉLEZ GUERRERO

TRABAJO DE GRADO EN MODALIDAD PARTICIPACIÓN ACTIVA EN GRUPO
DE INVESTIGACIÓN PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO ELECTRÓNICO

DIRIGIDO POR
MAURO CALLEJAS CUERVO
DIRECTOR GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN SOFTWARE (GIS) UPTC

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA
TUNJA
2016

Nota de Aceptación:

Jurado

Jurado

Tunja, 06 de Julio de 2016

Dedico este trabajo de grado a mi familia, parte vital de mi formación como ser humano.

A mis padres Manuel y Alicia, motores incondicionales e infatigables para el logro de mis metas.

A mi hermana Ángela, compañera de mil experiencias.

A todas las personas que hicieron parte de mi formación académica y personal, depositando en mi la confianza para continuar y creando el amor hacia el conocimiento y la vida.

A los que nunca dudaron que lograría éste triunfo.

AGRADECIMIENTOS

La obtención de un gran logro hubiese sido imposible únicamente por medio del trabajo constante y una ardua labor, ya que la contribución de personas que hacen parte de mi formación como profesional y ser humano ha sido de inmensas proporciones. Por esta razón es una auténtica delectación aprovechar este apartado expresando mis agradecimientos para reconocer el valor de cada persona que con su soporte incondicional aportó sin duda alguna a la culminación de este reto.

Agradezco magnánimamente a mi familia, su apoyo y aliento nunca han cesado, por estar siempre presente en todo este camino recorrido. Agradezco en especial a mi papá Manuel José por ser un ejemplo a seguir, mi sustento económico, moral, anímico y la fuente de la fortaleza necesaria para siempre avanzar y continuar con mi camino a pesar de los obstáculos que se hayan podido presentar, a mi mamá Carmen Alicia por brindarme siempre su cuidado delicado, amor, disposición, y entrega absoluta que solo una madre puede ofrecer, por crear y mantener siempre las condiciones necesarias para que mi entorno sea el más adecuado para una estabilidad sin condiciones, agradezco especialmente a mi hermana Ángela Carolina, quien siempre tiene una sonrisa o broma para alegrarme en los momentos más tensos o de estrés, por convertirse en un motivo fundamental para hacer mejor las cosas que día a día realizo.

En segundo lugar, agradezco a mi alma máter, la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia por darme la oportunidad de formarme como ingeniero en tan distinguidas aulas.

Agradezco al espacio que me acogió gratamente haciendo mi educación más completa y fructífera mediante el componente investigativo, el Grupo de Investigación en Software GIS, que siempre ha proporcionado los medios asaces para llevar a cabo las actividades necesarias en el marco de labores académico investigativas y del presente trabajo de grado.

Un agradecimiento inmenso a mi director de investigación y trabajo de grado, Mauro Callejas por su visión centrada y objetiva que permite la apreciación profunda de un tema, por la probidad en su profesión como educador en todo el sentido de la palabra, por sus consejos, ideas y trazado que aportan a mi formación integral como persona, ingeniero e investigador. La correcta orientación y especificidad para el desarrollo de mis propias ideas desde un comienzo ha sido la clave del éxito en este camino.

Al gran equipo de pedagogos de las asignaturas en ciencias básicas, quienes asentaron las bases de mi edificación profesional, especialmente a todos aquellos que con gran amor y dedicación siempre consagraron lo mejor de sí mismos para presenciar la realización de sus estudiantes.

A los integrantes la Escuela de Ingeniería Electrónica en Tunja, al director de escuela Ing. Oscar Hernández Gómez, a todos los ingenieros que hicieron de mis clases las mejores y más atractivas de todas a través de una enseñanza basada en el ofrecimiento, entrega y paciencia absoluta. A ustedes les debo la guía y el amor que le tengo al área en el que he decidido estar inmerso, mil gratitudes por compartir sus invaluable conocimientos, experiencias personales, anécdotas y reparos a través de estos cinco años de una forma propicia, con un único interés en formar a sus educandos como los mejores profesionales para la competencia laboral, como los mejores seres humanos para la vida en sociedad y como los mejores elementos que hacen parte ahora de un ecosistema más grande fuera de sus salones de clase y universidad. Estoy seguro de que no existen palabras que denoten todo mi agradecimiento.

Agradezco a mis amigos y compañeros de clases, quienes cada día a través de las vivencias compartidas en las aulas crearon siempre un ambiente propicio para el buen desarrollo de las actividades académicas y sociales, por los favores incondicionales y desinteresados que siempre recibí de ellos.

A quienes estuvieron presente durante mi estancia en México, con quienes formé un estrecho vínculo de amistad y perenemente expresaron sus mejores deseos, por las enseñanzas dentro y fuera del ámbito académico que sin duda me enriquecen integralmente, haciendo de la culminación de mi paso por la universidad la mejor de todas, desbordadas de buenos momentos. Al Instituto Tecnológico de Ciudad Madero por brindarme una visión global de la ingeniería desde el punto de vista laboral y empresarial, a los ingenieros, docentes y directivas de aquel instituto que prestaron especial importancia en la enseñanza de sus materias y la agradable permanencia en su institución. Un agradecimiento a mis compañeros de clase, amigos del Tecnológico y amigos de México como tal, con ustedes aprendí a ser más que un ingeniero a través de su ilustración y entrega personal en todas las esferas que componen un intercambio académico y cultural, sin duda alguna formaron mi último semestre universitario el más enriquecedor de todos, brindando las palabras de aliento necesarias para continuar. Quiero que recuerden siempre que son las personas más encantadoras que haya podido conocer.

A cada persona que lee este pequeño escrito un agradecimiento especial por quedarse junto a mí a pesar de mi aparente olvido, por acertar en aquellos momentos en los que me he ausentado o en los que pude ser inferior a sus expectativas: ha sido un recorrido extenso y riguroso en el que muchas veces la concentración y adherencia a un objetivo en particular hace dejar entre renglones la importancia del contacto humano, pero estoy seguro de que supieron comprender perfectamente las diversas situaciones a lo largo de estos años. Los llevo en mi mente y corazón.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	22
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	24
1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	24
1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	24
1.3 SISTEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA	24
2. JUSTIFICACIÓN	26
3. OBJETIVOS	28
3.1 OBJETIVO GENERAL	28
3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	28
4. MARCO REFERENCIAL	29
4.1 MARCO TEÓRICO	29
4.1.1 Estimación.	29
4.1.2 Estimadores.	30
4.1.3 Estimadores lineales.	30
4.1.4 Estimadores no lineales.	32
4.1.5 Filtro de Kalman.	33
4.1.6 Variantes del filtro de Kalman	40
4.1.7 Filtro de Kalman Extendido	42
4.1.8 Filtro de Kalman <i>Unscented</i>	47
4.1.9 Señales.	55
4.1.10 Señales biomédicas y biomecánicas	56
4.1.11 Sensores.	62
4.1.12 Tecnología MEMS	64
4.1.13 Fusión de datos.	77

4.1.14	Complejidad computacional.	79
4.2	MARCO CONCEPTUAL	81
4.3	ESTADO DEL ARTE	87
5.	DISEÑO METODOLÓGICO	91
5.1	MÉTODO	91
5.1.1	Identificación de los algoritmos para la estimación no lineal de posición y orientación de objetos en movimiento.	91
5.1.2	Determinación de las características propias de los filtros de Kalman.	91
5.1.3	Implementación de un escenario basado en pluralidad de sensores de movimiento.	92
5.1.4	Implementación de los filtros y preparación del entorno.	93
5.1.5	Implementación de un escenario de referencia.	93
5.1.6	Análisis de los datos a través de la raíz cuadrada del error cuadrático medio.	94
5.1.7	Análisis de la complejidad computacional de los filtros.	94
5.1.8	Recopilación y presentación de resultados.	95
5.2	CRITERIOS DE VALIDEZ Y CONFIABILIDAD	95
5.3	VARIABLES E INDICADORES	95
5.4	PROTOCOLOS DE PRUEBA	97
5.4.1	Protocolo 1. Variación de los parámetros de desviación estándar	97
5.4.2	Protocolo 2. Determinación de la desviación estándar promediada	97
5.4.3	Protocolo 3. Verificación de la eficiencia de los valores de desviación estándar promediada	97
5.4.4	Protocolo 4. Obtención de los datos en periodos de tiempo específicos	98
6.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	99
6.1	ESCENARIO BASADO EN UNA PLURALIDAD DE SENSORES.	99
6.1.1	Descripción del sistema basado en pluralidad de sensores.	99
6.1.2	Descripción del sistema de captura de movimiento y procesamiento de señales.	101

6.1.3	Descripción de la implementación de los algoritmos del filtro de Kalman.	102
6.2	ESCENARIO DE REFERENCIA PARA LA COMPARACIÓN DE LOS FILTROS.	103
6.2.1	Descripción de la plataforma para la experimentación.	103
6.2.2	Descripción del proceso de análisis de los datos en MATLAB.	106
6.3	ANÁLISIS DE LOS DATOS SIMULADOS.	108
6.3.1	Resultados de la toma de datos establecida en el protocolo 1.	108
6.3.2	Resultados de las pruebas del protocolo 2.	116
6.3.3	Resultados de la toma de datos establecida en el protocolo 3.	116
6.3.4	Resultados de la toma de datos establecida en el Protocolo 4.	121
6.4	CAPTURA Y ANÁLISIS DE DATOS BIOMECÁNICOS	127
6.4.1	Protocolo para la obtención de los datos biomecánicos.	127
6.4.2	Análisis de los datos biomecánicos.	127
6.5	ANÁLISIS DE COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DE LOS ALGORITMOS FILTRO DE KALMAN UNSCENTED Y EXTENDIDO.	130
6.5.1	Análisis de complejidad del filtro de Kalman Extendido.	131
6.5.2	Análisis de complejidad del filtro de Kalman <i>Unscented</i> .	132
6.5.3	Análisis de complejidad conjunta de los filtros de Kalman.	134
7.	CONCLUSIONES	137
8.	DIVULGACIÓN	138
	BIBLIOGRAFIA	139
	ANEXOS	144

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Características principales de la MPU Invensense MPU-9150.	76
Tabla 2. Resumen de especificaciones del servomotor TowerPro SG-90.	105
Tabla 3. RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 1 rad/s.	109
Tabla 4. RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 5 rad/s.	109
Tabla 5. RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 10 rad/s.	110
Tabla 6. RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 15 rad/s.	110
Tabla 7. Parámetros de desviación estándar óptimos para cada velocidad angular específica.	112
Tabla 8. Parámetros de desviación estándar promediados.	116
Tabla 9. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar específicas para cada velocidad en la medida y el proceso.	117
Tabla 10. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar promediados en la medida y el proceso.	118
Tabla 11. Diferencia del RMSE promedio entre ambos escenarios del protocolo 3.	119
Tabla 12. Valor del RMSE obtenido en 1 y 15 rad/s con distintos tiempos de captura.	121
Tabla 13. Valores estimados para el movimiento biomecánico.	127
Tabla 14. Valores de máxima flexión y extensión de los datos biomecánicos capturados.	128
Tabla 15. Diferencia entre los valores máximos y mínimos de las señales biomecánicas versus los valores estimados.	128
Tabla 16. Parámetros de complejidad computacional medidos en el EKF.	130
Tabla 17. Parámetros de complejidad computacional medidos en el UKF.	132
Tabla 18. Parámetros de complejidad computacional conjunta.	134

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Etapas de ejecución del filtro de Kalman.	40
Figura 2. Variantes del filtro de Kalman.	41
Figura 3. Etapas de ejecución del filtro de Kalman Extendido.	46
Figura 4. Etapas de ejecución del filtro de Kalman Unscented.	55
Figura 5. Movimiento de Flexión y Extensión visto desde un plano parasagital.	60
Figura 6. Movimiento de Pronación y Supinación visto desde un plano frontal.	61
Figura 7. Movimiento de Abducción y Aducción visto desde un plano coronal.	61
Figura 8. Sensores para biomecánica y captura de movimiento.	63
Figura 9. Vista de un sistema MEMS microscópicamente.	65
Figura 10. Representación de un acelerómetro mecánico.	66
Figura 11. Representación de un acelerómetro basado en MEMS.	66
Figura 12. Representación de la medida de un giroscopio.	68
Figura 13 Representación de un giroscopio de estructura vibrante de dos ejes fabricado por Bosch Corporation	69
Figura 14. Magnetómetro basado en el principio de la fuerza de Lorentz construido con tecnología MEMS.	72
Figura 15. Ejes principales de una aeronave.	74
Figura 16. Ejes principales de una aeronave detectados por una MPU.	75
Figura 17. Tarjeta de desarrollo para MPU-9150.	77
Figura 18. Distribución de las MPU ubicadas en las extremidades superiores.	100
Figura 19. Interconexión de las MPU.	100
Figura 20. Sistema de captura de movimiento y procesamiento de señales.	102
Figura 21. Plataforma para la experimentación y simulación del movimiento de flexión y extensión.	104
Figura 22. Diferentes vistas de la plataforma y sus movimientos.	105
Figura 23. Ejemplo de la información de resumen que el programa de análisis brinda.	108
Figura 24. Valor del RMSE obtenido con los parámetros de desviación estándar óptimos para cada velocidad angular. Protocolo 1.	112
Figura 25. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 1 rad/s. Protocolo 1.	114
Figura 26. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 10 rad/s. Protocolo 1.	115
Figura 27. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar específica para cada velocidad en la medida y el proceso	117
Figura 28. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar promediados en la medida y el proceso.	118

Figura 29. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 15 rad/s. Protocolo 3 Escenario 2.	120
Figura 30. Valor del RMSE obtenido a diferentes tiempos de captura de las señales a velocidad angular de 15 rad/s.	122
Figura 31. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 1 rad/s y tiempo de captura 3600 s.	123
Figura 32. Detalle de la forma de onda al iniciar la captura, velocidad angular de 1 rad/s y tiempo de captura 3600 s.	124
Figura 33. Detalle de la forma de onda al finalizar la captura, velocidad angular de 1 rad/s y tiempo de captura 3600 s.	124
Figura 34. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 15 rad/s y tiempo de captura 3600 s	125
Figura 35. Detalle de la forma de onda al iniciar la captura, velocidad angular de 15 rad/s y tiempo de captura 3600 s	126
Figura 36. Detalle de la forma de onda al finalizar la captura, velocidad angular de 15 rad/s y tiempo de captura 3600 s.	126
Figura 37. Forma de onda al capturar movimiento biomecánico de miembro superior (articulación del codo), velocidad angular aprox. de 6 rad/s y tiempo de captura 10 s.	129
Figura 38. Comparación de la forma de onda filtrada frente a la señal estimada, velocidad angular aprox. de 6 rad/s y tiempo de captura 10 s.	130
Figura 39. Balance computacional del código del filtro de Kalman Extendido.	131
Figura 40. Balance computacional del filtro de Kalman Unscented.	133
Figura 41. Balance computacional de los Filtros de Kalman.	135

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO A. Certificado Ponencia Internacional PAHCE 2014	144
ANEXO B. Plataforma de Captura y Análisis de Información Biomecánica Usando Sensores Inerciales: Calibración y Validación	145
ANEXO C. Architecture proposal for a support system to upper limb telerehabilitation by capturing biomechanical signals	152
ANEXO D. Programa de Análisis de datos en MATLAB	163
ANEXO E. Implementación del filtro de Kalman Extendido	171
ANEXO F. Implementación del filtro de Kalman <i>Unscented</i>	175

LISTA DE SIGLAS

ADC	Conversor Analógico-Digital
DAC	Conversor Digital-Analógico
DMP	Procesador Digital de Movimiento
DOF	Grado de Libertad
DPS	Grados por Segundo
DSP	Procesador Digital de Señales
EKF	Filtro de Kalman Extendido
FIFO	Primera Entrada, Primera Salida
FPGA	Arreglo de Compuertas Programables en Campo
GLONASS	Sistema Global de Navegación por Satélite
GPS	Sistema de Posicionamiento Global
IMU	Unidad de Medición Inercial
I ² C	<i>Inter-Integrated Circuit</i>
INS	Sistema de Navegación Inercial
KF	Filtro de Kalman
LDC	Número de líneas de código
LQE	Estimador Lineal Cuadrático
LQR	Regulador Lineal Cuadrático
LSB	Bit Menos Significativo
MEMS	Sistemas Microelectromecánicos
MPC	Métodos por Clase
MPCP	Promedio de todos los Métodos por Clase
MPU	Unidad de Procesamiento de Movimiento
MSD	Desviación de Media Cuadrática
MSE	Error de Media Cuadrática
MSR	Raíz Cuadrada Matricial
NASA	Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio
NDC	Número de Clases
NDD	Número de Declaraciones
NDF	Número de funciones de cada clase
NDS	Número de Saltos/Llamados
PDR	Porcentaje de Declaraciones por Rama
PLCC	Porcentaje de Líneas de Código Comentadas
PMB	Profundidad máxima por bloque
PnP	<i>Plug and Play</i>
PPB	Profundidad promedio por bloque
PSD	Densidad Espectral de Potencia
RMS	Raíz Media Cuadrática
RMSD	Raíz Cuadrada de la Desviación Cuadrática Media
RMSE	Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio
SiP	Sistema en Paquete
SoC	Sistema en Chip
SUKF	Filtro de Kalman Escalado <i>Unscented</i>

UKF	Filtro de Kalman <i>Unscented</i>
USB	Bus serie universal
VDC	Valor de Complejidad
VDCM	Valor de Complejidad Máximo

LISTA DE SÍMBOLOS

$[a \times]$	Matriz del producto vectorial de un vector: $a \times b = [a \times] b$
I_n	Matriz identidad de tamaño n
\sim	Expresión de rango
\times	Producto cruz
\sim	Aproximadamente
\bullet	Multiplicación de cuaterniones
A	Amplitud
F_s	Frecuencia de muestreo [Hz]
g	Valor de la aceleración de la gravedad en la Tierra ($\sim 9,81 \text{ ms}^{-2}$)
q	Desviación estándar en el proceso
Q_k	Matriz de covarianza de ruido del proceso, o matriz de multiplicación de cuaterniones
r	Desviación estándar en la medida
R_k	matriz de covarianza de ruido de medición de salida, o matriz de rotación
T_c	Tiempo de captura [s]
T_s	Período de muestreo [s]
\bar{x}	Promedio o media aritmética
\bar{x}_q	Desviación estándar promedio en el proceso
\bar{x}_{qe}	Desviación estándar promedio en el proceso para el EKF
\bar{x}_{qu}	Desviación estándar promedio en el proceso para el UKF
\bar{x}_r	Desviación estándar promedio en la medida
\bar{x}_{re}	Desviación estándar promedio en la medida para el EKF
\bar{x}_{ru}	Desviación estándar promedio en la medida para el UKF
φ_m	Inclinación magnética local del campo magnético de la Tierra

LISTA DE ABREVIATURAS

aprox.	Aproximado
Dr.	Doctor
ej.	Ejemplo
fac.	Facultad
ing.	Ingeniería
máx.	Máximo
mín.	Mínimo
vel.	Velocidad

RESUMEN

En señales biomecánicas, la aplicación de filtros de Kalman permite hacer una corrección del error evidenciado en los datos capturados, pero hay una gran variedad y tipos de estos filtros que pueden ser implementados. Una comparación exhaustiva del funcionamiento de dos de ellos permite identificar qué tipo de filtro de Kalman es el mejor candidato para ser usado. La investigación se centra en encontrar un filtro de Kalman idóneo que por su comportamiento permita recolectar la mayor información acerca de los movimientos mecánicos y cinemáticos de las Unidades de Procesamiento de Movimiento, reduciendo o eliminando totalmente el ruido producido por campos electromagnéticos, perturbaciones menores en el movimiento, entre otros, que afectan de forma considerable el proceso de extracción y utilización de la información.

PALABRAS CLAVE

Filtro de Kalman, Unidades de Medición Inercial, Unidades de Procesamiento de Movimiento, Biomecánica, Mecánica, Cinemática, Movimiento, Kalman Extendido, Kalman Unscented, Captura de Movimiento, Sistemas Embebidos, Procesamiento Digital de Señales, Control.

ABSTRACT

In biomechanical signals, the application of Kalman filters allows corrections in the measurement errors observed in captured data, but exist a considerably variety and types of these filters that can be implemented. A comprehensive comparison of the performance for two of them allows the identification of what kind of Kalman filter is the best candidate to be used. The research focuses on finding a suitable Kalman filter that improves the gathering of the information about mechanical and kinematic motion from Motion Process Units, reducing or completely eliminating the noise caused by electromagnetic fields, minor perturbations in the movement, among others, that significantly affect the process of information extraction and usage.

KEYWORDS:

Kalman filter, Inertial Measurement Units, Motion Process Units, Biomechanics, Mechanics, Kinematics, Motion, Extended Kalman Filter, Unscented Kalman Filter, Motion Capture, Embedded Systems, Digital Signal Processing, Control.

**EVALUACIÓN DE RENDIMIENTO DE ESTIMADORES NO LINEALES
BASADOS EN LA APLICACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN A SEÑALES
BIOMECÁNICAS**

INTRODUCCIÓN

Hoy en día el análisis de las señales mecánicas físicas producidas por el cuerpo humano en diversas actividades motrices y cinemáticas son recolectadas por numerosos elementos electrónicos, como es el caso de las unidades de medición inercial y las unidades de procesamiento de movimiento, que hacen posible la utilización de estos dispositivos especializados cada vez más asequibles al público en general en el tratamiento de enfermedades, activación y manipulación de elementos, entre otros usos que se le puede dar a los datos con un tratamiento indicado que la convierta en información.

Específicamente hablando de los métodos para la recolección de las señales biomecánicas, se puede afirmar que las IMU y MPU juegan un papel importante desde el aumento en el desarrollo de los sistemas MEMS. La utilización de dichos dispositivos ha revolucionado también otras áreas, como por ejemplo la incorporación de éstos sistemas en la electrónica de consumo en el caso de los teléfonos móviles, la estabilización de video en cámaras electrónicas, sistemas de navegación computarizados, sistemas de seguridad, entre otros. Como lo menciona Šprdlík¹, el campo en donde los sistemas MEMS ganan reciente notabilidad es en la medicina ya que poseen las ventajas más apetecibles, como son la portabilidad de los elementos debido a su reducido tamaño y peso, además de características eléctricas y electrónicas en donde el bajo consumo de energía y la interoperabilidad con diversas plataformas es un tema de vital importancia en esta área. Así mismo, el autor añade: “las IMU pueden complementar o sustituir a otros medios de medición o evaluación para el diagnóstico clínico como de análisis de movimiento basado en video, la evaluación de los temblores y otros síntomas de la observación visual, o la medición de la estabilidad postural mediante posturografía”², y esto se debe a que su confiabilidad, precisión y bajo costo en comparación a otros sistemas de captura lo hacen una alternativa viable a los futuros desarrollos que se realicen con esta tecnología.

Continuando con la importancia del tratamiento de los datos para obtener una información, antes de realizar cualquier análisis y utilización de las señales disponibles producto de la recolección experimental o sistematizada, es necesario someterla a una transformación (procesamiento) específica que brinde mayor relevancia y confiabilidad de la información en una ventana de interés. En la mayoría de las aplicaciones actuales, tomar los datos provenientes directamente del proceso de recolección es una mala práctica, ya que se requiere de algún tipo de acondicionamiento a la señal y posteriormente emplear la información en la aplicación específica para la cual es requerida.

¹ ŠPRDLÍK, Otakar. Detection and Estimation of Human Movement Using Inertial Sensors. Applications in Neurology, Czech Technical University in Prague, 2012.

² Ibíd.

El procesamiento de señales, realizado tanto de forma analógica o digital, es un paso de suma importancia que no puede obviarse en ningún proceso tecnológico que involucre generación, transporte y análisis de señales, y más aun tratándose de información biomecánica recolectada directamente del cuerpo humano. Este procesamiento se realiza sometiendo los elementos recogidos a procesos lógicos, aritméticos, geométricos y matemáticos realizados directamente sobre un flujo de datos por medio de la electrónica, bien sea por computador o mediante dispositivos embebidos. Entre los objetivos más importantes de la transformación de las señales para su aprovechamiento se encuentran las de filtrar, separar, reunir, seleccionar, acondicionar, detectar, clasificar o mejorar la información proveniente del sistema de interés. En el caso particular del presente trabajo, el procesamiento de señales estará enfocado al filtrado de la señal, el cual es un proceso en el que un elemento – netamente electrónico digital para esta situación– discrimina rangos definidos de datos basados en características propias de la señal, como lo son frecuencias, y realiza cambios en la amplitud o fase de la señal procesada.

Entre los filtros más destacados para un procesamiento adecuado de señales que involucran movimiento se encuentra el filtro de Kalman, el cual posee además variantes de su algoritmo para casos específicos de aplicación. En concreto, el filtro de Kalman es de tipo digital, el cual se realiza por medio de un proceso matemático –o algoritmo- dentro de un procesador y está destinado a la estimación de estados futuros en un sistema lineal en donde existe ruido blanco para poder proceder a su eliminación. Los usos de éste filtro son muy variados, siendo especialmente destacados en el procesamiento de datos georreferenciados (como el caso de los receptores GPS y triangulación satelital), seguimiento de objetos en movimiento, reconocimiento facial y otras características ópticas, de voz y eliminación de interferencias en general.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Los sistemas que capturan el movimiento mecánico y cinemático en el cuerpo humano arrojan información que contiene múltiples errores de medición producidos por perturbaciones, en donde su origen se debe a la naturaleza misma del movimiento y a otros factores que pueden ser emanados de elementos externos, como por ejemplo los disturbios electromagnéticos formados por dispositivos electrónicos o líneas de transmisión eléctricas, y también otros creados por el mismo sistema de captura, en donde los dispositivos usados generan diversos tipos de errores en los datos. Los problemas detectados en la información no procesada son altamente visibles en forma de imprecisiones, desviaciones, deriva o truncamiento de los valores reales que se espera obtener y que reducen la calidad de una aplicación en donde la exactitud de la información recogida es un factor importante. Por otro lado, la corrección o disminución de los errores en los datos biomecánicos se puede realizar mediante el uso de filtros, entre los que se encuentra el filtro de Kalman, destacándose el filtro de Kalman *Unscented* y el filtro de Kalman Extendido, mas sin embargo hasta el momento no se ha podido establecer de manera comprobada cuál de los dos tipos de filtro puede mejorar la información extraída a partir de la captura de señales reduciendo al mínimo los errores presentados en los datos según el requerimiento de la aplicación final.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿De qué manera es posible determinar qué tipo de filtro es más efectivo para ser implementado en una aplicación de recolección de datos biomecánicos a partir de un sistema con pluralidad de sensores con el propósito de minimizar o eliminar el error en la información extraída a partir de la captura de la señal?

1.3 SISTEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA

¿Cuáles son los tipos de algoritmos existentes para la estimación no lineal de posición y orientación de objetos en movimiento?

¿Qué características presentan los algoritmos del filtro de Kalman *Unscented* y filtro de Kalman Extendido?

¿De qué manera se puede comprobar el funcionamiento de los algoritmos del filtro de Kalman *Unscented* y filtro de Kalman Extendido para realizar una evaluación cuantitativa de cada uno?

¿Cómo se puede capturar información biomecánica a través de sensores?

¿Cuál es la forma adecuada para realizar un análisis de los datos biomecánicos capturados?

¿De qué manera se puede calcular la diferencia entre los datos capturados y un sistema de referencia?

¿Cuál es la forma adecuada para inferir sobre el mejor rendimiento entre los filtros en estudio?

2. JUSTIFICACIÓN

En el proyecto de investigación del Grupo de Investigación en Software GIS de la UPTC se hace uso de diversos métodos para la captura del movimiento biomecánico, en donde se evidencian las problemáticas que contaminan el análisis de la información en el sistema desarrollado, por lo cual la implementación de un adecuado filtro de Kalman se hace necesario para el avance del proyecto.

Diversos tipos del filtro de Kalman son ampliamente usados en diversidad de procesos que no involucran el área de la biomédica o biomecánica^{3,4,5,6}, mas sin embargo la determinación de un filtro óptimo para la reducción del error en la captura de datos para aplicaciones específicas puede generar una información significativa y constructiva que permita evidenciar el uso de cada filtro.

Desde el punto de vista biomecánico, el desarrollo de la presente investigación aporta un conocimiento relevante y significativo en donde la implementación de filtros eficientes provee mejores resultados en la generación de la información recolectada, donde se minimizan los factores que dificultan el uso adecuado de los datos, brindando así un mejor aprovechamiento de las señales provenientes de las MPU y abriendo por consiguiente la posibilidad del uso masificado de los filtros caso de estudio en dispositivos biomédicos de todo tipo, lo cual genera un beneficio directo a los especialistas de la salud al tener información precisa, a los usuarios en general al conocer de manera acertada la información recolectada y finalmente a todo aquel que necesite de una información biomédica o biomecánica libre de componente de ruido y errores.

Desde el punto de vista de la ingeniería electrónica, el desarrollo e implementación de filtros digitales –en este caso siendo dos tipos de filtro de Kalman– abre una gran gama de líneas de desarrollo en donde el primer beneficio directo es la posibilidad de crear sistemas de recolección de información aún más eficientes que permitan un rápido avance de la tecnología en la captura de datos, en el procesamiento digital de los mismos y en el desarrollo de mejores algoritmos que hagan más eficiente la implementación de los filtros en diversas plataformas tecnológicas.

³ KHODER, Wassim y JIDA, Bassem. A Quaternion Scaled Unscented Kalman Estimator for Inertial Navigation States Determination Using INS/GPS/Magnetometer Fusion. Journal of Sensor Technology, 2014. p. 101-117.

⁴ DABLEMONT, S, *et al.* Forecasting "High" and "Low" of financial time series by Particle systems and Kalman filters. Université catholique de Louvain, Machine Learning Group, DICE, 2007.

⁵ CUEVAS, Erik, *et al.* Kalman filter for vision tracking. Freie Universität Berlin, Institut für Informatik, 2005.

⁶ STETZEL, Kirk D, *et al.* Electrochemical state and internal variables estimation using a reduced-order physics-based model of a lithium-ion cell and an extended Kalman Filter. Journal of Power Sources, Marzo 2015. p. 490–505.

Hay que resaltar que, en el campo de la ingeniería, el uso del filtro de Kalman se puede dar en muchos ámbitos y aplicaciones por lo que el aporte de ésta investigación puede sentar las bases para el desarrollo de otras investigaciones destinadas a determinar la calidad de la información, mejoras en la transmisión de datos, implementación eficiente de algoritmos en sistemas embebidos y finalmente el procesamiento adecuado de información digital de diversos orígenes.

3. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

Verificar y determinar mediante comparación directa entre dos tipos del filtro de Kalman, siendo éstos filtro de Kalman *Unscented* y filtro de Kalman Extendido, cuál de ellos posee las características necesarias para la minimización o eliminación del error de las señales biomecánicas adquiridas a través de una pluralidad de sensores que permiten capturar el movimiento humano.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Identificar los algoritmos para estimación no lineal de posición y orientación de objetos en movimiento.

Identificar las características básicas de los algoritmos el filtro de Kalman *Unscented* y Extendido.

Implementar un escenario basado en una pluralidad de sensores de movimiento.

Implementar los algoritmos filtro de Kalman *Unscented* y Extendido en un lenguaje que permita la utilización de cada uno de ellos.

Proponer un escenario de referencia que permita realizar la comparación de los filtros frente al sistema basado en la pluralidad de sensores.

Generar el análisis de los datos a través de la Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio.

Realizar un análisis de complejidad computacional de los algoritmos filtro de Kalman *Unscented* y Extendido.

Plasmar en un documento las ventajas y desventajas de la aplicación de cada uno de los filtros.

4. MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se desarrolla la sustentación teórica que fundamenta el estudio de esta investigación, analizando y exponiendo las investigaciones y antecedentes para el correcto entendimiento y desarrollo del trabajo aquí plasmado.

4.1 MARCO TEÓRICO

Mediante exposición directa y un análisis completo se cubre la temática de información preliminar, que comprende desde la definición y clarificación de los estimadores hasta la ilustración y estructura de los Filtros de Kalman sumado a las variantes incluidas en esta investigación.

4.1.1 Estimación.

La estimación es un proceso matemático que permite hallar una aproximación a un determinado valor, que puede ser desconocido pero inferido a partir de datos circundantes y cercanos al mismo, y permite completar o predecir información faltante, incierta o inestable⁷. Generalmente, este proceso matemático involucra usar el valor estadístico derivado de una muestra de datos para un parámetro determinado⁸.

Una de las formas más comunes para realizar estimaciones es dividir los datos en muestras para facilitar su análisis, en donde el conteo general de una variable (que se presume demasiado grande) puede inferirse a partir de una fracción de la misma que contenga suficiente información representativa para determinar los datos faltantes. Este tipo de estimación es común en censos poblacionales, donde difícilmente se puede recolectar toda la información específica para el estudio que se pretenda realizar.

Otra forma de estimación matemática es realizada a partir de límites inferiores y superiores de una cantidad de medida que no pueda ser especificada con claridad o especificidad. Como la estimación provee información no existente, es especialmente útil en procesos donde la generación de información futura es crítica. Para brindar algunos ejemplos de aplicación de las estimaciones a sistemas de uso cotidiano y en ingeniería, el radar tiene como objetivo conocer el número de determinados objetos, usualmente aeronaves, barcos o focos de lluvia cuando el radar es de uso meteorológico, y esta información es mediante el análisis de los tiempos de retraso entre los ecos recibidos y los impulsos transmitidos. Una estimación es necesaria para analizar estos tiempos de respuesta, ya que los impulsos reflejados pueden

⁷ RAYMOND A, Kent. Estimation. *Data Construction and Data Analysis for Survey Research*, 2001. p. 157.

⁸ *Ibíd.*

contener ruido eléctrico adquirido a través del viaje en el espacio, y los valores afectados están distribuidos al azar de modo que el tiempo de retraso debe ser una aproximación del valor real, pero lo suficientemente bueno como para ofrecer un margen de error mínimo y la información pueda ser tomada como válida y confiable⁹.

4.1.2 Estimadores.

Un estimador es un conjunto de técnicas que por medio de diversas herramientas realizan la estimación en una serie de datos específica. Desde la definición estricta de la estadística, es una regla para calcular el estimado de una cantidad por medio de los datos de observación recolectados, y tres partes deben ser diferenciables entre sí: la regla (estimador), la cantidad de interés (el estimando) y su resultado (la estimación)¹⁰.

Desde la definición formal, se debe suponer que existe un parámetro fijo Θ que debe ser estimado. Para ello, una función mapea el espacio de muestra a un conjunto de estimaciones de la muestra, a dicha función se le llama estimador. Dicho estimador de Θ generalmente se representa con el símbolo $\hat{\Theta}$. Según sea el grado de conveniencia, se puede expresar el estimador usando el álgebra de variables aleatorias: Así, si x se utiliza para denotar una variable aleatoria que corresponde a los datos observados, el estimador se simboliza como una función de dicha variable aleatoria, $\hat{\Theta}(x)$.

Existen diversos tipos de estimadores usados según el tipo de análisis que se quiera realizar al conjunto de datos, las características esenciales de los mismos y sobretodo el comportamiento, descritos desde el punto de vista de funciones matemáticas, que presentan los datos a través del tiempo. Desde ese punto de vista, los estimadores están divididos en dos categorías, de tipo lineal y de tipo no lineal.

4.1.3 Estimadores lineales.

Son aquellos estimadores que realizan aproximaciones de los datos basados en un modelo lineal, y por lo tanto funcionan en modelos de procesos únicamente lineales. El estimador de este tipo más conocido es la Regresión Lineal. La regresión lineal es una técnica que permite modelar la relación entre una variable dependiente generalmente denotada con la letra Y, y uno o más explicativos escalares, llamados variables independientes, denotada con la letra X.

⁹ AGHAKOUCHAK, Amir. Modeling Radar Rainfall Estimation Uncertainties: Random Error Model. Journal of Hydrologic Engineering, 2010. p. 265-274.

¹⁰ LEHMANN, Erich Leo y CASELLA, G. Theory of Point Estimation. Segunda Edición, Nueva York, Springer, 1998.

En una regresión lineal simple¹¹, se puede predecir las puntuaciones en una variable a partir de las puntuaciones en una segunda variable. La variable que se está prediciendo se llama la variable criterio y es la misma variable dependiente. La variable en la que se basan las predicciones se llama en la variable predictora y es la misma variable independiente. Cuando sólo hay una variable de predicción, el método de predicción se llama regresión simple.

Un gran número de procedimientos han sido desarrollados para la estimación de parámetros y la inferencia en la regresión lineal. Estos métodos difieren en la simplicidad computacional de los algoritmos, la presencia de una solución de forma cerrada, robustez con respecto a las distribuciones de colas pesadas, y los supuestos teóricos necesarios para validar propiedades estadísticas deseables tales como la consistencia y la eficiencia asintótica¹².

Aparte de las regresiones lineales, existen otros métodos para realizar estimaciones lineales, dentro de los cuales se destacan los siguientes:

Estimación por mínimos cuadrados

- Mínimos cuadrados ordinarios (MCO).
- Mínimos cuadrados generalizados (GLS).
- Porcentuales Mínimos Cuadrados.
- Mínimos Cuadrados Iterativos Reponderados (IRLS).
- Regresión con variables instrumentales (IV).
- Total de mínimos cuadrados (TLS).

La estimación de máxima verosimilitud

- Estimación de máxima verosimilitud.
- Regresión Ridge.
- Desviación de regresión de mínimos absolutos (LAD).
- Estimación adaptativa.

Otras técnicas de estimación

- Bayesiano de regresión lineal.
- Regresión cuantil.
- Modelos mixtos.
- Regresión de componentes principales (PCR).
- Regresión de mínimos de ángulo.

¹¹ COHEN, J, *et al.* Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences. Lawrence Erlbaum Associates, 2003.

¹² YAN, Xin. Linear Regression Analysis: Theory and Computing. World Scientific, 2009. p.1–2.

- El estimador de Theil-Sen.

4.1.4 Estimadores no lineales.

Según lo propuesto por Mitter¹³, existen dos categorías dentro de los estimadores no lineales: Estimación estática de sistemas no lineales y estimación de estado para sistemas dinámicos no lineales.

De una manera general, los estimadores no lineales brindan una relación entre un conjunto de variables independientes y dependientes dentro de un sistema previamente modelado, en donde el diseñador de la aplicación define el tipo de relación que se da entre las variables que componen el sistema. Cuando se puede establecer cualquier tipo de relación entre las variables dependientes e independientes, hay dos situaciones fundamentales que deben analizarse¹⁴. En primer lugar se debe analizar la correspondencia entre los grupos de variables para que su asociación cobre un sentido específico y no carezca de validez. En segunda instancia, se debe analizar a qué grado las variables están correlacionadas entre sí, para comprobar efectivamente que se trate de un sistema no lineal. Técnicamente hablando, la estimación no lineal “es un procedimiento de ajuste que estimará cualquier tipo de relación entre una variable dependiente (o variable de respuesta) y una lista de variables independientes.”¹⁵

Por citar algunos ejemplos, dentro de los métodos de estimación no lineal se encuentran las siguientes técnicas de ajuste:

- Estimación por Mínimos Cuadrados
- Funciones de pérdida
- Mínimos cuadrados ponderados
- Máxima verosimilitud
- Criterios de convergencia
- Parámetros de forzamiento
- Mínimos locales
- Métodos Cuasi-Newtonianos
- Procedimiento Simplex
- Patrón de Movimiento de Hooke-Jeeves
- Patrón de búsqueda Rosenbrock
- Matriz de arpillera y desviación estándar

¹³ MITTER, Sanjoy K. Nonlinear Estimation. Massachusetts Institute of Technology. Department of Electrical Engineering and Computer Science. Laboratory for Information and Decision Systems, Cambridge.

¹⁴[Citado en 19 de Marzo de 2016] Nonlinear Estimations Disponible en <<http://documents.software.dell.com/Statistics/Textbook/Nonlinear-Estimation>>

¹⁵ Ibíd.

- Filtro de partículas.
- Filtros de Kalman no Lineales

4.1.5 Filtro de Kalman.

El filtro de Kalman, también llamado *Linear Quadratic Estimator* (LQE), es un algoritmo desarrollado por Rudolf Emil Kálmán, del cual deriva su nombre, en donde su funcionamiento es de un estimador óptimo recursivo que provee una solución a tareas frecuentes en rastreo, seguimiento y predicción de datos que involucre una o más fuentes de ruido, inexactitudes o inconsistencias¹⁶. Se basa en la observación del comportamiento de los datos a través del tiempo y mediante análisis estadístico realiza correcciones *a priori* y *a posteriori* de los mismos, produciendo valores estimados que tienden a ser más precisos que aquellos obtenidos puramente de las mediciones realizadas en un instante definido de tiempo. Entiéndase estimador óptimo en el sentido de que, si todo el ruido que afecta a los datos es de tipo Gaussiano, el filtro de Kalman minimiza el error cuadrático medio de los parámetros estimados¹⁷.

Desde su desarrollo en el inicio de la década de los sesenta, el filtro de Kalman ha sentado la base de muchos adelantos tecnológicos que hubiesen sido imposibles sin su aplicación, como la mejora en la industria aeroespacial, en especial a las misiones Apolo de la NASA donde el filtro cobró gran renombre al llevar a Neil Armstrong a la luna¹⁸, aplicaciones diversas pasando desde la electrónica de consumo en cada dispositivo GPS integrado en los teléfonos celulares hasta el control de trayectoria de la mayoría de satélites que orbitan la tierra.

Desde un punto de vista teórico-matemático, el filtro de Kalman “es un algoritmo que permite la inferencia exacta en un sistema dinámico lineal, el cual es un modelo Bayesiano similar a un modelo de Markov oculto, pero donde el espacio de estados de las variables latentes es continuo y donde todas las variables latentes y observadas tienen una distribución gaussiana, a menudo una distribución gaussiana multivariada”¹⁹.

De una forma general y sin recurrir aún a la matemática asociada al proceso, el filtro de Kalman se ejecuta en dos pasos bien definidos: la etapa de predicción y la etapa

¹⁶ LACEY, Tony. Tutorial: The Kalman Filter [Tutorial: El Filtro de Kalman] En: Massachusetts Institute of Technology Web Literature. Capítulo 11. Massachusetts. p. 133-140

¹⁷ KLEEMAN, Lindsay. Understanding and Applying Kalman Filtering. Department of Electrical and Computer Systems Engineering Monash University, Clayton.

¹⁸ FARAGHER, Ramsey. Understanding the Basis of the Kalman Filter Via a Simple and Intuitive Derivation. IEEE Signal Processing Magazine, 2012. p. 128-132.

¹⁹ Ibíd.

de actualización. En la etapa de predicción y tal como su nombre lo sugiere, el filtro de Kalman genera un valor estimado futuro a partir del estado actual de las mediciones que se realicen (*a priori*), incluyendo el ruido y la incertidumbre que ellas puedan tener. Dicho estado futuro es actualizado en la segunda etapa por medio de la información real (no predicha) del tiempo siguiente (*a posteriori*), produciendo una salida final que corresponde a una “mezcla” o fusión entre el valor predicho y el valor que fue realmente obtenido para ese instante de tiempo. La proporción de dicha fusión está dada por un valor constante llamado Ganancia de Kalman. El filtro repite éstas dos etapas a lo largo del tiempo, una tras otra, haciendo uso de la característica de recursividad, lo cual permite evaluar una entrada en tiempo real en muestras realizadas bajo un intervalo de tiempo indefinido.

El filtro de Kalman se describe por medio de la siguiente ecuación:

$$\hat{x}_k = K_k \cdot z_k + (1 - K_k) \cdot \hat{x}_{k-1} \quad (1)$$

Teniendo en cuenta la descripción realizada, la estimación del filtro \hat{x}_k depende de la ganancia del filtro de Kalman K_k , de la observación (o actualización) del sistema en el tiempo actual z_k más un proporcional de corrección fuertemente influenciado por el estado estimado del filtro de Kalman en el instante de tiempo anterior \hat{x}_{k-1} . Se hace énfasis en que el subíndice k es la designación de los valores de tiempo discreto, por lo que k corresponde al intervalo de muestreo actual mientras que $k - 1$ al tiempo inmediatamente anterior a éste. El propósito final del filtro es hallar la estimación \hat{x}_k de la señal x , y realizarlo para cada instante de tiempo k .

El único componente no conocido de la ecuación del filtro es la Ganancia de Kalman, el cual corresponde al factor de realimentación del error y su valor debe ser actualizado para cada iteración. Este parámetro es calculado automáticamente por el filtro de Kalman mientras las varianzas de los ruidos que afectan la señal estimada sea conocida. Su cálculo se explicará posteriormente en el desarrollo de éste trabajo.

Dado que el filtro de Kalman obtiene la respuesta de estimación a partir del comportamiento dinámico del sistema y de su observación a través del tiempo, es de fundamental importancia modelar el sistema sobre el cual se aplicará el proceso y además parametrizar los factores que puedan alterar ese modelo y su observación, lo que se conoce como ruido. A grandes rasgos y siguiendo la estructura del cálculo planteada por Esme²⁰, el sistema dinámico será modelado por las leyes que rigen el comportamiento del mismo, en su mayoría de veces leyes físicas, las entradas de control conocidas y finalmente las medidas múltiples provenientes de sensores, por ejemplo, para formar un estimado de las cantidades variables del sistema (su

²⁰ [Citado en 17 de Marzo de 2016] ESME, Bilgin. Kalman Filter For Dummies, a mathematically challenged man's search for scientific wisdom. Disponible en <<http://bilgin.esme.org/BitsAndBytes/KalmanFilterforDummies>>

estado). Así pues, el modelo general del filtro de Kalman se puede comenzar a dividir del siguiente modo:

- Modelo del sistema:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k \quad (2)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (3)$$

Se puede entender que para cada valor de la señal x_k debe ser evaluada la ecuación estocástica (2), que recibe el nombre de ecuación de estado, cuyos componentes son:

- El vector de estado x_k que contiene los términos de interés del sistema, es decir, la señal de entrada a ser procesada.
- El vector u_k que contiene todas las entradas de control del sistema.
- El vector w_k que contiene el ruido del proceso para cada parámetro del vector de estado. El ruido del proceso puede ser extraído a partir de una distribución normal multivariable con media igual a cero y covarianza dada por la matriz de covarianza Q_k .
- La matriz de transición A que aplica el efecto de cada parámetro de estado del sistema en el momento $k - 1$ sobre el estado del sistema en el tiempo k .
- La matriz de control de entrada B que aplica el efecto de cada parámetro de control de entrada en el vector u_k .

Además de la ecuación de estado, también se emplea el modelo matemático del sistema por medio de la observación y se expone en su equivalente ecuación de observación, también llamada ecuación de medida (3), de carácter estocástico, que posee los siguientes componentes.

- El vector de medida z_k que contiene los términos de interés del sistema, desde el punto de vista de la observación.
- La matriz de transformación H que mapea los parámetros del vector de estado dentro del dominio de medición.
- El vector v_k que contiene el ruido de medida para cada parámetro del vector de medida. Este ruido se comporta de manera muy similar al ruido presente en la

ecuación de estado, en donde se asume que puede ser extraído a partir de una distribución normal multivariable con media igual a cero y covarianza dada por la matriz de covarianza R_k .

Dado que el objetivo del filtro de Kalman es obtener los estados de x_k a partir de las observaciones z_k , se puede reescribir la ecuación (3) del siguiente modo:

$$Hx_k = z_k - v_k \quad (4)$$

Lo cual es completamente válido dado que el valor estimado de estado sin su ruido de proceso (entendido como la transformación realizada por H) es igual al valor observado con la debida sustracción el ruido que pueda tener implícito dicha observación. Cabe resaltar que la ecuación de estado (2) es la responsable de la etapa de predicción, mientras que la ecuación de medida (3) es la responsable de la etapa de corrección.

El problema subsecuente de la implementación de un filtro de Kalman es el desconocimiento del ruido v_k presente en cada etapa corrección del sistema, y como es un ruido, por definición es impredecible²¹.

El filtro puede estimar el estado tomando en cuenta la observación y el estado anterior, como se había analizado al principio, el cual puede ser expresado por medio de la siguiente ecuación:

$$\hat{x}_k = a\hat{x}_{k-1} + K_k(z_k - a\hat{x}_{k-1}) \quad (5)$$

La ecuación (5) es en efecto la misma ecuación (1) pero organizada de una mejor forma para conveniencia del lector y siguiendo con la línea de explicación con la que se viene trabajando. Ahora, atendiendo a la organización propuesta por Levys¹³ se analizará la importancia del valor de fusión de la Ganancia de Kalman.

Suponiendo que $K_k = 0$, se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\hat{x}_k = a\hat{x}_{k-1} \quad (6)$$

Lo cual significa que la estimación actual realizada por el filtro está regida únicamente por la predicción en el instante de tiempo inmediatamente anterior y no tiene en cuenta la etapa de corrección en ninguna medida. Caso contrario si la ganancia del filtro es $K_k = 1$, en donde la estimación actual realizada por el filtro está regida

²¹ [Citado en 17 de Marzo de 2016] LEVYS, H. The Extended Kalman Filter: An Interactive Tutorial for Non-Experts. Disponible en <http://home.wlu.edu/~levys/kalman_tutorial/>

únicamente por la etapa de corrección, es decir, por el valor medido en el proceso, tal como se muestra en la ecuación (7).

$$\hat{x}_k = a\hat{x}_{k-1} + z_k - a\hat{x}_{k-1} = z_k \quad (7)$$

La importancia de la correcta elección de la ganancia se evidencia ya que la respuesta del filtro depende directamente de su valor para realizar la estimación adecuadamente. El cálculo de la ganancia es realizado por el mismo filtro conforme a los parámetros estadísticos que sean ingresados, es decir, indirectamente desde el ruido.

Si se observa de nuevo la ecuación (3), el ruido asociado a la medición v_k es desconocido, pero puede ser estimado, por ejemplo, de la hoja de especificaciones del sensor que se esté empleando. Generalmente el valor de exactitud del sensor dará la idea de qué tan ruidosa o estable puede ser la salida del mismo. Se llamará a dicho valor r el cual no será dependiente del tiempo, es más bien una propiedad del sensor. Se puede calcular la ganancia en términos de r :

$$K_k = \frac{p_k \cdot h}{(h \cdot p_k \cdot h + r)} \quad (8)$$

En donde p_k es la predicción del error que se puede calcular recursivamente dada la función (9):

$$p_k = (1 - K_k \cdot h) \cdot p_k \quad (9)$$

Lo que esto significa es que la ganancia de Kalman se calcula en tiempo real haciendo uso de un estimador para determinar la cantidad de error actual en la medida. Suponiendo que el error es cero, la ganancia se torna nula también debido a que si la salida es totalmente acertada (el valor estimado no tiene error), no hay necesidad de hacer la etapa de corrección, tal como se ve en la ecuación (6). Si por el contrario el error es demasiado alto, es decir igual a 1, es como si se estuviera teniendo en cuenta solo el valor de lectura realizada sin una estimación previa, el caso visto en la ecuación (7), y un estado predicho por el filtro de Kalman en esta situación no es un valor confiable. Hay que tener en cuenta la idea en que Levys y Esme acotan con gran razón: la presencia de ruido excesivo anula todo esfuerzo en corregir las malas predicciones creadas por el filtro de Kalman (*) .

(*) Idea extraída de Levys¹³: “Noise overcomes our ability to correct bad predictions.” y de Esme¹²: “The only thing to keep in mind is: «The better you estimate the noise parameters, the better estimates you get.»”

Si se reúne todas las ecuaciones y se agrupan según su etapa de operación, se obtiene:

- Etapa de Predicción:

$$\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k + w_k \quad (2)$$

$$p_k = ap_{k-1}a \quad (10)$$

- Etapa de Corrección:

$$K_k = \frac{p_k \cdot h}{(h \cdot p_k \cdot h + r)} \quad (8)$$

$$p_k = (1 - K_k \cdot h) \cdot p_k \quad (9)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k(z_k - h \cdot \hat{x}_k) \quad (11)$$

Ahora, para que el modelo más completo y general elaborado quede representado por medio de matrices es necesario usar álgebra lineal para resolver el problema. Se enfatiza en el hecho de que $A \times B$ matricialmente hablando no es necesariamente lo mismo que $B \times A$, por esto se realiza la operación de transposición, y además de que una matriz multiplicada por su misma inversa da como resultado una matriz identidad. Las ecuaciones entonces quedan expresadas del siguiente modo:

- Etapa de Predicción:

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (12)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (13)$$

- Etapa de Corrección:

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (14)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (15)$$

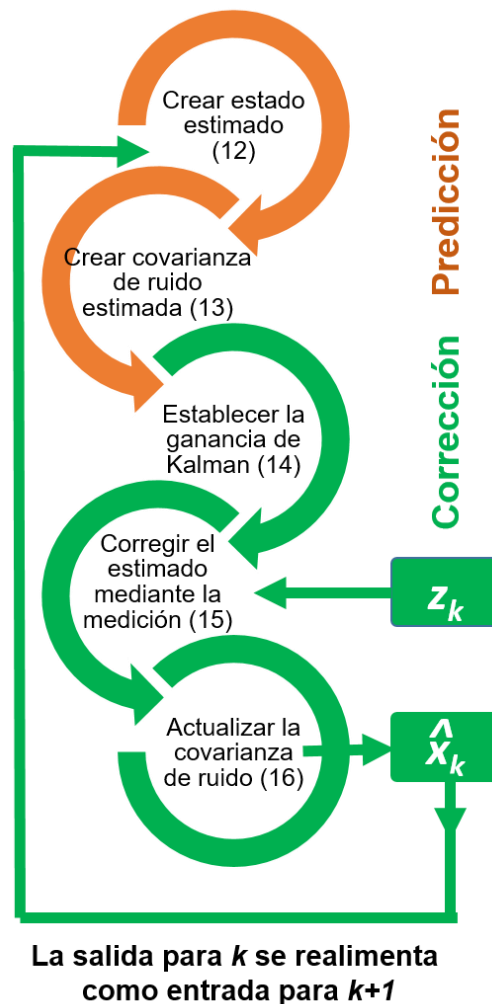
$$P_k = (1 - K_k H)P_k^- \quad (16)$$

Como enfatiza Esme²³, lo más difícil de efectuar una implementación del filtro de Kalman es encontrar las matrices de covarianza de ruido, tanto para el proceso (definida por la matriz Q) como para la medición (definida por la matriz R). Hallar R es un poco más simple dado que las características propias del sensor pueden proveer información relevante acerca del ruido que pueda generar sus observaciones, pero el ruido del proceso no es tan fácilmente modelable.

Por último, solo basta hacer la iteración del filtro a través del tiempo para obtener los resultados deseados.

²³ [Citado en 18 de Marzo de 2016] ESME, Bilgin. Kalman Filter For Dummies, a mathematically challenged man's search for scientific wisdom. Disponible en: <<http://bilgin.esme.org/BitsAndBytes/KalmanFilterforDummies>>

Figura 1. Etapas de ejecución del filtro de Kalman.

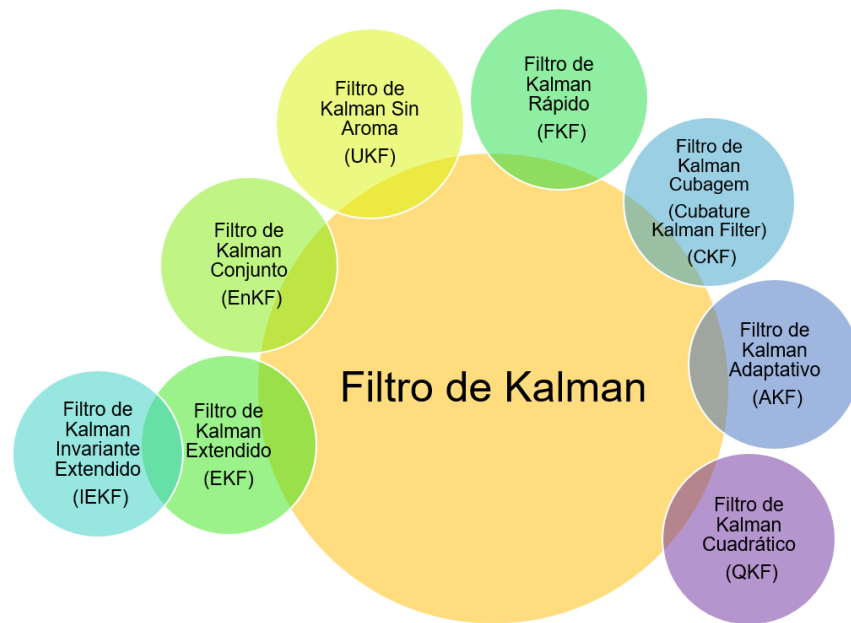


Autor. Abstracción realizada a partir de Esme¹⁵, disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter#/media/File:Basic_concept_of_Kalman_filtering.svg y Aimonen, disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Filtro_de_Kalman#/media/File:Kalman_Filter.jpg

4.1.6 Variantes del filtro de Kalman

Es bien conocida la aplicación del filtro de Kalman en diversidad de sistemas lineales, pero cuando se enfrenta a la estimación de un sistema no lineal, el filtro de Kalman debe adaptarse a las nuevas condiciones de proceso. Existen algunas variantes del filtro de Kalman que permite su implementación en sistemas no lineales e inclusive en donde el ruido no se puede describir por medio de una distribución gaussiana pura. En esencia, el filtro de Kalman continúa inalterado desde su núcleo, pero se realizan diferentes versiones que pueden solucionar problemas ajustados a la vida real.

Figura 2. Variantes del filtro de Kalman.



Fuente: Autor

Existe gran variedad de filtros de Kalman para diversos propósitos, dentro de los cuales se destaca el filtro de Kalman Extendido por ser la versión no lineal más directa del filtro de Kalman, y el filtro de Kalman *Unscented*, otro estimador no lineal basado en la transformada *Unscented* del cual deriva su nombre.

Existen además filtros útiles en aplicaciones basadas en frecuencia, como lo es el filtro de Kalman Rápido, basado en el método de bloqueo de Helmert-Wolf que permite un procesamiento rápido y adecuado de imágenes satelitales²⁴; el filtro de Kalman Cuadrático que permite una formulación rápida de resultados suavizados²⁵; y filtros de Kalman que se ocupan de resolver problemas presentados con las versiones generales no lineales de optimización, como lo es el caso del filtro de Kalman Conjunto, el cual es "adecuado para problemas con un gran número de variables, tales como discretizaciones de ecuaciones diferenciales parciales en modelos geofísicos²⁶", el filtro de Kalman Cubagem "que hace posible calcular numéricamente las integrales momento multivariados encontradas en el filtro

²⁴ LANGE, Antti A. Fast Kalman Processing of the GPS Carrier-Phases for Mobile Positioning and Atmospheric Tomography. Surveyors Key Role in Accelerated Development Eilat, Israel, 2009.

²⁵ MONFORT, Alain, *et al.* A Quadratic Kalman Filter. Crest Financial Economist Seminar, Banque de France, 2013.

²⁶ EVENSEN Geir. The Ensemble Kalman Filter: theoretical formulation and practical implementation. Ocean Dynamics, 2003. p. 343–367.

Bayesiano no lineal²⁷ o el filtro Filtro Complejo Ampliamente Lineal de Kalman que aprovecha la covarianza Hermitiana y Complementaria de los vectores de ruido para mejorar el rendimiento del filtro²⁸.

4.1.7 Filtro de Kalman Extendido

El filtro de Kalman Extendido (EKF) es la implementación del filtro de Kalman para sistemas no lineales, en donde sus características son invariantes al filtro de Kalman, por ejemplo, en donde se asume que el ruido de proceso y de medición es de tipo gaussiano. La adecuación del filtro de Kalman para la estimación en sistemas no lineales estuvo a cargo en su mayoría por el Centro de Investigación Ames de la NASA, cuyo interés en el filtro de Kalman permitió la revolución de la era espacial^{29,30}. El filtro de Kalman Extendido adapta técnicas de cálculo multivariado, en especial las expansiones de las series de Taylor y métodos puramente matemáticos para linealizar el modelo y aplicar un filtro de Kalman estándar³¹. También, un reciente desarrollo de un filtro de Kalman Extendido mejorado se ha presentado para tratar los problemas de estados invariantes, el cual adopta el nombre de filtro de Kalman Extendido Invariante (IEKF).

La formulación del filtro de Kalman Extendido respecto a su versión lineal es bastante sencillo. Si el KF requiere de ecuaciones lineales que describan el estado del sistema, en el EKF las ecuaciones pueden ser no lineales siempre y cuando la función que represente el comportamiento del mismo sea diferenciable. Con base a las ecuaciones 12 a 16 planteadas anteriormente, se realiza la modificación de las mismas para que acepten una función no lineal diferenciable como parte del modelo de estado³².

²⁷ ARASARATNAM, Ienkanan, y HAYKIN, Simon. Cubature Kalman Filters. Cognitive Systems Laboratory, Department of Electrical and Computer Engineering, McMaster University, Hamilton, 2009.

²⁸ DANG, Wenbing, y SCHARF, Louis L. Extensions to the Theory of Widely Linear Complex Kalman Filtering. Department of Electrical and Computer Engineering, Colorado State University, Fort Collins, 2011.

²⁹ KALMAN, Rudolf y BUCY, R. New results in linear filtering and prediction theory. Journal of Basic Engineering, 1961. p. 95-108.

³⁰ McELHOE, Bruce A. An assessment of the navigation and course corrections for a manned flyby of Mars or Venus. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions, 1966. p. 613-623.

³¹ THRUN, Sebastian, *et al.* Probabilistic Robotics. The MIT Press. Cambridge, Massachusetts, 2006. p. 51-65.

³² [Citado en 20 de Marzo de 2016] LEVYS, H. The Extended Kalman Filter: An Interactive Tutorial for Non-Experts. Disponible en: <http://home.wlu.edu/~levys/kalman_tutorial/>

El modelo del filtro de Kalman Extendido queda representado de la siguiente manera, en donde la función m es cualquier función no lineal diferenciable y \dot{m}_k representará la primera diferenciación finita en el tiempo discreto k .

- Modelo del sistema:

$$x_k = Ax_{k-1} + w_k \quad (17)$$

$$z_k = m(x_{k-1}) + v_k \quad (18)$$

- Etapa de Predicción:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} \quad (19)$$

$$p_k = p_{k-1} + q \quad (20)$$

- Etapa de Corrección:

$$K_k = p_k \dot{m}_k (\dot{m}_k p_k \dot{m}_k + r)^{-1} \quad (21)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k(z_k - m(\hat{x}_k)) \quad (22)$$

$$p_k = (1 - K_k \dot{m}_k) p_k \quad (23)$$

Las anteriores ecuaciones muestran el funcionamiento del filtro de Kalman Extendido con un modelo simplificado del que se había trabajado anteriormente, permitiendo su rápida comparación y bosquejo de funcionamiento. El modelo descrito no posee señal de control ni matrices de transición, aunque su uso no está restringido.

Hay dos cosas que se deben considerar para terminar de formular el EKF³³: la forma en cómo hallar la primera diferenciación finita \dot{m}_k sin saber cuál es la función m directamente, y además cómo generalizar el modelo para que represente un estado multivariado.

³³ Op. cit. LEVYS, H.

Para encontrar la diferencia finita de una función con respecto a una variable, hay que recordar esta operación es una medida de la tasa a la que el valor de dicha función cambia con respecto al cambio de la variable. Dicho cambio puede ser representado como el límite que tiende a cero de las diferencias sucesivas de los valores en la función con respecto al tiempo, matemáticamente representado como:

$$\dot{m}(X) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x} \quad (24)$$

Si un algoritmo no puede encontrar la diferencia finita de una función desconocida por sí mismo, es necesario realizar las restas sucesivas que darán una aproximación a la primera diferencia finita de la función, esto resuelve el primer problema planteado.

$$\frac{m_{k+1} - m_k}{k} \quad (25)$$

Si la señal de medición z_k es función de la señal de proceso x_k , se puede aplicar la ecuación 25 de forma que sea posible la división de las diferencias sucesivas de la primera señal por las diferencias sucesivas de la segunda señal:

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{x_{k+1} - x_k} \quad (26)$$

Para representar un modelo general multivariado, hay que empezar a modificar el sistema desde el modelo de estado en donde el componente de medición lineal está representado por:

$$z_k = Hx_k \quad (27)$$

Dado como ejemplo para una sola señal, como un sensor, en un estado unidimensional. Al trabajar de manera matricial se puede extender el número de componentes del sistema, representado de la siguiente manera (por ejemplo, con tres sensores y dos variables de estado).

$$z_k = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}x_{k1} & + & h_{12}x_{k2} \\ h_{21}x_{k1} & + & h_{22}x_{k2} \\ h_{31}x_{k1} & + & h_{32}x_{k2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Para un caso no lineal, el número de filas corresponde al número de observadores (sensores) y el número de columnas al número de estados, pero recordando que cada valor en la matriz está dado por la relación que hay entre observadores y estados, es decir, cada elemento será el valor actual de la primera diferencia finita del valor del sensor con respecto a su valor de estado.

$$z_k = \frac{dz}{dx} = \mathbf{J} \quad (29)$$

La matriz resultante por lo tanto es una Matriz Jacobiana, en donde su determinante se denomina Jacobiano en cálculo vectorial. El modelo del sistema para el caso no lineal (ecuación 17) necesita ser reescrito.

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_k \quad (30)$$

Donde A , la matriz de transición, es reemplazada por la función de transición Jacobiana f . La notación generalmente usada es F_k para esta Matriz Jacobiana (que reemplaza a la función $y f$) H_k para la matriz Jacobiana, que reemplaza la función del sensor m . Se llega al modelo del EKF generalizado:

- Modelo del sistema:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_k) + w_k \quad (31)$$

$$z_k = m(x_k) + v_k \quad (32)$$

- Etapa de Predicción:

$$\hat{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_k) \quad (33)$$

$$P_k = F_{k-1} P_{k-1} F_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (34)$$

- Etapa de Corrección:

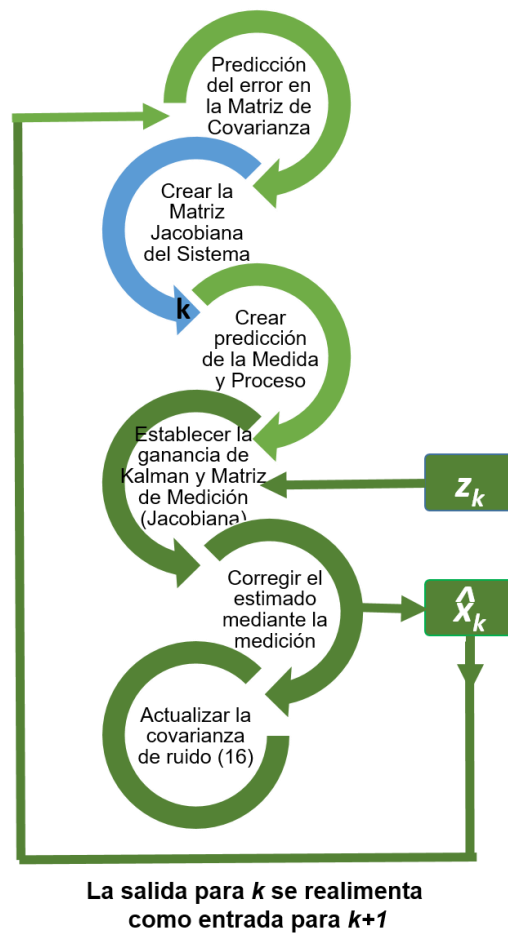
$$K_k = P_k H_k^T (H_k P_k H_k^T + R)^{-1} \quad (35)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k(z_k - m(\hat{x}_k)) \quad (36)$$

$$P_k = (1 - K_k H_k) P_k \quad (37)$$

En muchos casos descritos, la función de transición es simplemente la función identidad, entonces la matriz Jacobiana se reduce a ser solo una matriz identidad.

Figura 3. Etapas de ejecución del filtro de Kalman Extendido.



Fuente: Autor

4.1.8 Filtro de Kalman *Unscented*

El filtro de Kalman *Unscented* (UKF) es otra variante del KF común, aplicado a sistemas no lineales multivariados, el cual se desarrolló de forma similar al EKF, pero mejorando algunas de sus características. Retomando el actuar del EKF, se encuentra que es necesario emplear matrices Jacobianas para realizar una aproximación lineal del sistema descrito por su ecuación de estado. La parametrización del EKF dificulta obtener una aproximación a la linealización cuando el sistema presenta órdenes altos, como por ejemplo en los procesos en donde el tiempo de muestreo es muy reducido (k posee un valor muy corto de tiempo).

El EKF puede crear pequeñas desviaciones en los resultados estimados, conocido como deriva, creada por la estimación del estado a partir de la propagación analítica de las variables aleatorias gaussianas (media y covarianza) por medio de la linealización estimada, y dicha deriva es además acumulativa dada la recursividad del filtro.

El filtro de Kalman *Unscented* hace un trabajo excepcional al utilizar una manera determinística de muestreo aproximado, el cual según Cao³⁴, está diseñado para producir múltiples puntos de muestreo llamados Puntos Sigma, los cuales son cuidadosamente seleccionados y se encuentran “distanciados” uno de otro con base a la covarianza en torno al estado estimado actual, prosiguiendo con la propagación de dichos puntos sobre un mapa de no linealidad (llamado también nube de dispersión de Puntos Sigma, ya que los puntos transformados crean un contorno definido) para obtener una estimación más acertada o cercana de los valores estadísticos del ruido que afecta el sistema (media del error y covarianza). En el UKF se usa de manera frecuente la descomposición de Cholesky para escoger un conjunto de puntos sigma el cual sigue el estado promedio como un vector x de longitud n y covarianza dada por una matriz P de tamaño $n \times n$ ³⁵. Este proceso llamado Transformada *Unscented*, propuesto por Julier y Uhlmann³⁶, libera al UKF de realizar el procedimiento de restas sucesivas con el fin de hallar la primera diferencia finita de la función, es decir, se elimina la necesidad de recurrir al cálculo de la matriz Jacobiana, sin sacrificar otras características como el rendimiento.

³⁴ [Citado en 23 de Marzo de 2016] CAO, Yi. Learning the Unscented Kalman Filter. Disponible en: <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18217-learning-the-unscented-kalman-filter>>

³⁵ [Citado en 23 de Marzo de 2016] Factorización de Cholesky. Disponible en: <https://es.wikipedia.org/wiki/Factorización_de_Cholesky>

³⁶ JULIER, Simon J y UHLMANN, Jeffrey K. New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems. Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition VI, 1997.

Para el análisis de este algoritmo de aquí en adelante se empleará el aporte de Terejanu³⁷, el cual propone el modelo del sistema empleado anteriormente en la realización tanto del KF como del EKF.

- Modelo del sistema:

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_{k-1} \quad (38)$$

$$z_k = m(x_k) + v_k \quad (39)$$

El estado inicial del sistema x_0 tiene una media conocida $\mu_0 = E[x_0]$ y covarianza dada por $P_0 = E[(x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)^T]$. El estado predicho del sistema y de ruido es afectada por la Transformada *Unscented*⁶⁸:

$$x_k^{aug} = [x_k^T w_{k-1}^T v_k^T]^T \quad (40)$$

$$P_k^{aug} = \begin{bmatrix} P_k & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \quad (41)$$

Ahora es necesario seleccionar los Puntos Sigma para realizar las correcciones a las predicciones. Considere a X_{k-1} un conjunto de $2n + 1$ Puntos Sigma (donde n es la dimensión del espacio de estados en el modelo), junto con el peso para cada uno de ellos (dicho valor determinará la relevancia o cercanía estimada de cada Punto Sigma a la media y varianza real de la señal):

$$X_{k-1} = [(x_{k-1}^j, W^j) | j = 0, \dots, 2n] \quad (42)$$

La selección de Puntos Sigma es limitada según el diseñador y su cantidad varía en función de cuán no lineal sea el sistema. Considere la selección limitada de Puntos Sigma que incorpora la información de orden para cada uno de ellos³⁹:

³⁷ TEREJANU, Gabriel A. Unscented Kalman Filter Tutorial. Department of Computer Science and Engineering, University at Buffalo, Buffalo, 2006.

³⁸ WAN, Eric A. y VAN DER MERWE, Rudolph. The Unscented Kalman Filter. Oregon Graduate Institute of Science & Technology, Wiley Publishing, 2001.

³⁹ JULIER, Simon J y UHLMANN, Jeffrey K. Unscented Filtering and Nonlinear Estimation. Proceedings of the IEEE, 2004. p. 401–422.

$$x_{k-1}^0 = x_{k-1}^{aug}, \{-1 < W^0 < 1\} \quad (43)$$

$$x_{k-1}^i = x_{k-1}^{aug} + \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} P_{k-1} \right)_i, \{1:i:n\} \quad (44)$$

$$x_{k-1}^{i+n} = x_{k-1}^{aug} - \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} P_{k-1} \right)_i, \{n+1:i:2n\} \quad (45)$$

$$W^j = \frac{1-W^0}{2n}, \{1:j:2n\} \quad (46)$$

y a su vez, los pesos deben cumplir con la condición:

$$\sum_{j=0}^{2n} W^j = 1 \quad (47)$$

En donde el valor $\left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} P_{k-1} \right)_i$ es la fila o la columna de la matriz de la raíz cuadrada de $\frac{n}{1-W^0} P_{k-1}$.

El valor inicial de peso W^0 modifica la posición de los Puntos Sigma. Si es mayor o igual a 0, los puntos tenderán a reunirse más lejos del origen, mientras que, si este valor inicial es menor a 0, los puntos tenderán a reunirse más cerca del origen.

Cada punto sigma es propagado, como se mencionó en anterioridad, a través del modelo de proceso no lineal:

$$x_k^{f,j} = f(x_{k-1}^j) \quad (48)$$

Los puntos transformados son empleados para calcular los parámetros estadísticos, es decir la media y la covarianza de la predicción del modelo x_k .

- Etapa de predicción:

$$x_k^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j x_k^{f,j} \quad (49)$$

$$p_k^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j (x_k^{f,j} - x_k^f)(x_k^{f,j} - x_k^f)^T + Q_{k-1} \quad (50)$$

Una vez propagados por el modelo del sistema (proceso), los Puntos Sigma son propagados a través del modelo de observación no lineal:

$$z_{k-1}^{f,j} = m(x_{k-1}^j) \quad (51)$$

Los puntos transformados son empleados esta vez para calcular los parámetros estadísticos, es decir la media y la covarianza de la predicción de la observación z_k .

$$z_{k-1}^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j z_{k-1}^{f,j} \quad (52)$$

$$\delta(z_{k-1}^f) = \sum_{j=0}^{2n} W^j (z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f)(z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f)^T + R_k \quad (53)$$

$$\delta(x_k^f, z_{k-1}^f) = \sum_{j=0}^{2n} W^j (x_k^{f,j} - x_k^f)(z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f)^T \quad (54)$$

Una vez realizadas las predicciones de los valores estimados probabilísticos tanto en la medida como en el estado, es necesario combinar los procesos de predicción y medición real para obtener un estado más cercano a la realidad.

- Etapa de corrección:

$$K_k = \delta(x_k^f, z_{k-1}^f) \delta^{-1}(z_{k-1}^f) \quad (55)$$

$$x_k^{aug} = x_k^f + K_k(z_k - z_{k-1}^f) \quad (56)$$

$$P_k = P_k^f - K_k \delta^{-1}(z_{k-1}^f) K_k^T \quad (57)$$

Es habitual, como se explica en un principio, que para la selección de los Puntos Sigma sea necesario calcular la matriz de la raíz cuadrada de la covarianza posterior en cada iteración ($P_k = S_k S_k^T$). Como la corrección es aplicada al cálculo final de la covarianza, se puede modificar el algoritmo de una forma más óptima para que dicho valor se propague directamente en la matriz de la raíz cuadrada, es decir en S_k .

$$x_{k-1}^0 = x_{k-1}^{aug}, \{-1 < W^0 < 1\} \quad (58)$$

$$x_{k-1}^i = x_{k-1}^{aug} + \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} S_{k-1} \right)_i, \{1:i:n\} \quad (59)$$

$$x_{k-1}^{i+n} = x_{k-1}^{aug} - \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} S_{k-1} \right)_i, \{n+1:i:2n\} \quad (60)$$

$$W^j = \frac{1-W^0}{2n}, \{1:j:2n\} \quad (61)$$

Este cambio facilita la realización del cálculo, pero se debe implementar una matriz de raíz cuadrada inicial por medio de la factorización de Cholesky de la matriz final de covarianza del error.

$$S_0 = Cholesky(E[(x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)^T]) \quad (62)$$

Según lo expuesto por Terejanu⁴⁰ en su trabajo, como $W^j > 0$ para todos los $i \geq 1$ en la etapa de corrección, la predicción de la matriz de covarianza se puede reescribir con base a la ecuación 50 como:

⁴⁰ TEREJANU, Gabriel A. Unscented Kalman Filter Tutorial. Department of Computer Science and Engineering, University at Buffalo, Buffalo, 2006.

$$\begin{aligned}
p_k^f &= \sum_{j=0}^{2n} W^j (x_k^{f,j} - x_k^f) (x_k^{f,j} - x_k^f)^T + Q_{k-1} \\
p_k^f &= \sum_{j=1}^{2n} \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f) \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f)^T + \sqrt{Q_{k-1}} \sqrt{Q_{k-1}}^T \\
&\quad + W^0 (x_k^{f,0} - x_k^f) (x_k^{f,0} - x_k^f)^T \\
p_k^f &= \begin{bmatrix} \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f) & \sqrt{Q_{k-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f)^T \\ \sqrt{Q_{k-1}}^T \end{bmatrix} + W^0 (x_k^{f,0} - x_k^f) (x_k^{f,0} - x_k^f)^T \\
&\quad \text{Para } \{1:j:2n\}
\end{aligned} \tag{63}$$

En donde $\sqrt{Q_{k-1}}$ es la matriz de la raíz cuadrada de la covarianza del ruido en el proceso. Se puede usar la descomposición de Cholesky para expresar la transpuesta de la matriz en términos de una matriz ortogonal O_k y una matriz triangular positiva $(S_k^f)^T$.

$$O_k (S_k^f)^T = \begin{bmatrix} \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f) & \sqrt{Q_{k-1}} \end{bmatrix}^T \text{ Para } \{1:j:2n\} \tag{64}$$

Entonces, reemplazando la ecuación 64 en 63, se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_k^f &= S_k^f O_k^T O_k (S_k^f)^T + W^0 (x_k^{f,0} - x_k^f) (x_k^{f,0} - x_k^f)^T \\
P_k^f &= S_k^f (S_k^f)^T + W^0 (x_k^{f,0} - x_k^f) (x_k^{f,0} - x_k^f)^T
\end{aligned} \tag{65}$$

Para incluir el efecto del último término de la matriz de raíz cuadrada, se debe efectuar una factorización de Cholesky de primer grado:

$$S_k^f = \text{Cholesky} (S_k^f, (x_k^{f,0} - x_k^f), \text{sgn}\{W^0\} \sqrt{W^0}) \tag{66}$$

Donde sgn es la función signo y Cholesky entrega el factor de Cholesky de la ecuación 65. En consecuencia, la predicción de la matriz de covarianza se puede

escribir como $P_k^f = S_k^f (S_k^f)^T$. Lo mismo aplica a la covarianza posterior, que se puede expresar como $P_k = S_k (S_k)^T$ y la covarianza final como $\delta(z_{k-1}^f) = S_{z_{k-1}^f} S_{z_{k-1}^f}^T$.

En resumen:

- Etapa de Predicción

$$x_k^{f,j} = f(x_{k-1}^j) \quad (67)$$

$$x_k^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j x_k^{f,j} \quad (68)$$

$$(S_k^f) = qr([\sqrt{W^j}(x_k^{f,j} - x_k^f) \quad \sqrt{Q_{k-1}}]) \text{ Para } \{1:j:2n\} \quad (69)$$

$$S_k^f = Cholesky(S_k^f, (x_k^{f,0} - x_k^f), \text{sgn}\{W^0\}\sqrt{W^0}) \quad (70)$$

- Transformación de los Puntos Sigma para incorporar el efecto del ruido de proceso

$$x_k^{f,0} = x_k^f \quad (71)$$

$$x_k^{f,i} = x_k^f + \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} S_k^f \right)_i, \{1:i:n\} \quad (72)$$

$$x_k^{f,i+n} = x_k^f - \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} S_k^f \right)_i, \{1:i:n\} \quad (73)$$

- Propagar los puntos Sigma Transformados a través del modelo de medición

$$z_{k-1}^{f,j} = m(x_{k-1}^{f,j}) \quad (74)$$

$$z_{k-1}^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j z_{k-1}^{f,j} \quad (75)$$

$$S_{z_{k-1}^f} = qr(\begin{bmatrix} \sqrt{W^j}(z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f) & \sqrt{R_k} \end{bmatrix})$$

Para $\{1:j:2n\}$

(76)

$$S_{z_{k-1}^f} = Cholesky \left(S_{z_{k-1}^f}, (z_{k-1}^{f,0} - z_{k-1}^f), sgn\{W^0\}\sqrt{W^0} \right)$$
(77)

$$\delta(x_k^f, z_{k-1}^f) = \sum_{j=0}^{2n} W^j (x_k^{f,j} - x_k^f)(z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f)^T$$
(78)

La función qr regresa únicamente la matriz triangular negativa.

- Etapa de Corrección

$$K_k = (\delta(x_k^f, z_{k-1}^f) / S_{z_{k-1}^f}^T) / S_{z_{k-1}^f}$$
(79)

$$x_k^{aug} = x_k^f + K_k(z_k - z_{k-1}^f)$$
(80)

$$S_k = Cholesky \left(S_k^f, K_k \delta(x_k^f, z_{k-1}^f), -1 \right)$$
(81)

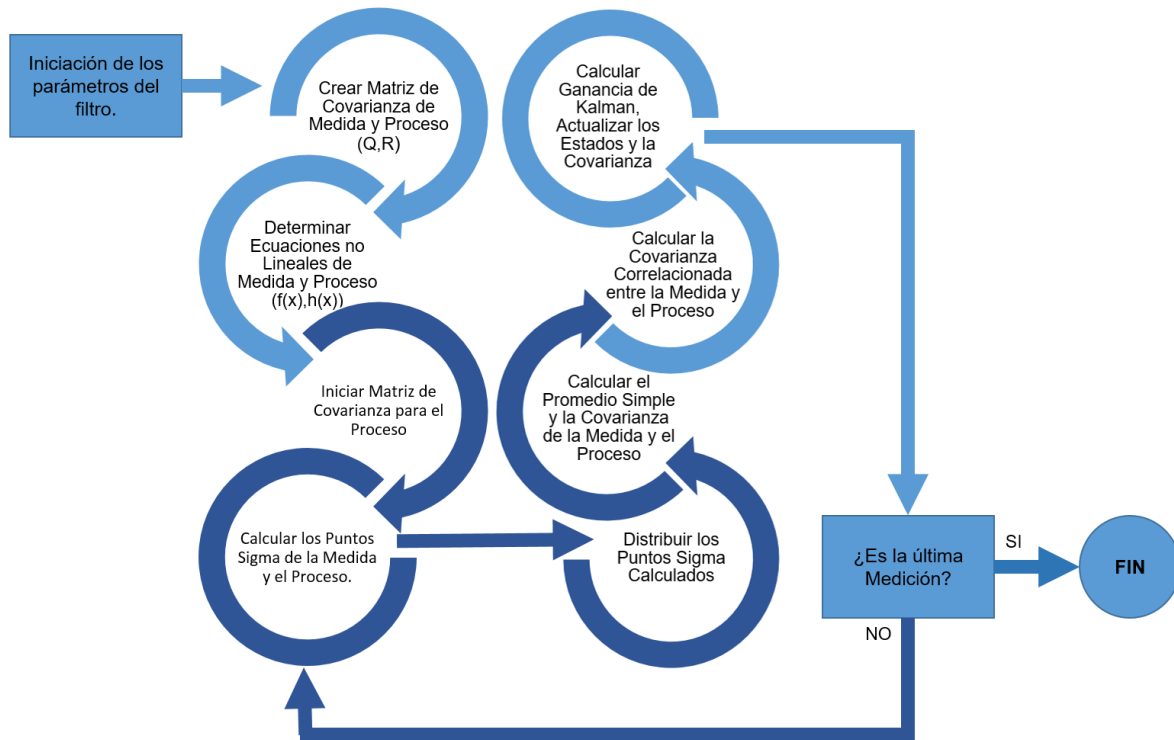
Donde el signo / denota una operación de sustitución inversa. Esta es una alternativa computacionalmente eficiente a la inversión de la matriz, aunque se puede usar dicha operación sin inconveniente también. Como la factorización de Cholesky es una matriz triangular negativa, se puede hallar el valor de la ganancia K_k usando una doble sustitución inversa en la ecuación:

$$K_k(S_{z_{k-1}^f}^T S_{z_{k-1}^f}) = \delta(x_k^f, z_{k-1}^f)$$
(82)

En la ecuación 81, como el argumento del medio en la factorización de Cholesky es una matriz $\in \mathbb{R}^{n \times n}$, el resultado es una consecución de n veces el factor de Cholesky usando las n columnas de la matriz.

De esta forma es posible implementar un filtro de Kalman *Unscented* algorítmicamente, en donde las operaciones básicas con matrices pueden ser sustituidas por métodos computacionalmente más eficientes.

Figura 4. Etapas de ejecución del filtro de Kalman *Unscented*.



Fuente: Autor. Adaptación realizada a partir de CALLEJAS, Mauro, *et al.* *Architecture proposal for a support system to upper limb telerehabilitation by capturing biomechanical signals*. Revista Facultad de Ingeniería UPTC, Vol. 24. No. 40, 2015. p. 43-50.

4.1.9 Señales.

En el campo de la ingeniería, una señal es una función que “transmite información sobre el comportamiento o atributos de algún fenómeno⁴¹”. Descrita de una manera física, una señal es una información transmitida de un punto a otro a través de un medio, como por ejemplo un alambre de cobre que puede transportar impulsos eléctricos. Las señales pueden ser también convenciones adoptadas por un grupo de personas en específico, en donde un canal de transmisión con un mensaje puntual puede ser interpretado según la convención, y por consiguiente la palabra “información” cobra un significado de mayor importancia.

⁴¹ PRIEMER, Ronald. *Introductory Signal Processing*. World Scientific, 1991. p. 1.

Las señales pueden ser categorizadas de muchas formas, pero eléctricamente se distinguen únicamente dos tipos: analógicas y digitales. Usualmente las señales eléctricas analógicas son las que interpretan el mundo real de una forma continua a través del tiempo, mientras que las señales digitales representan la información en intervalos de tiempo llamadas muestras. Con respecto al tipo de señales que se pueden encontrar en diversos campos de la vida cotidiana están las señales acústicas, producido por ondas oscilantes en un medio, usualmente el aire; señales visuales llamadas imágenes, producida por ondas de diferente frecuencia emanando en un espacio bidimensional; señales audiovisuales, una combinación de las señales visuales y acústicas; señales mecánicas que representan el movimiento y pueden ser monitoreadas de forma eléctrica y por último señales biológicas, provenientes de seres vivos en un sentido global de la interpretación.

4.1.10 Señales biomédicas y biomecánicas

La Biomedicina, también conocida como medicina teórica, es un término que comprende el conocimiento y la investigación en los campos de la medicina, veterinaria, odontología y ciencias biológicas fundamentales como la bioquímica, la biología celular, genética, zoología, botánica y microbiología. Las señales que se generan en estos ámbitos son llamadas señales biomédicas. Se trata de un término que puede englobar toda la información proveniente de todos los organismos vivos. Habitualmente se entienden como los registros de tiempo en el que sucede un evento biológico, como el latido del corazón o la contracción de los músculos porque todas las actividades mecánicas, eléctricas y químicas producen señales medibles y analizables.

Hay distintos tipos de señales biomédicas, como lo son por ejemplo señales bioeléctricas, generada por nervios y tejidos musculares como resultado de los cambios en las corrientes eléctricas; señales biomagnéticas, creadas por diversos órganos en forma de campo magnético; señales bioquímicas, que contienen información de los cambios en concentración de compuestos químicos en el cuerpo; señales bioacústicas, señales bioópticas, generada por los atributos ópticos o inducidos por la luz dentro de los sistemas biológicos; y finalmente señales biomecánicas, aquellas originadas directamente con el movimiento o desplazamiento.

Las señales biomecánicas, al igual que cualquier otra señal, posee propiedades temporales, es decir que no se puede describir como una constante a través del tiempo. La manera óptima y más directa de recolectar la información biomédica a través de sus señales es transduciéndola a una forma eléctrica, para lo cual se usan distintos tipos de sensores según el fenómeno que se desee analizar. Los sistemas biomecánicos poseen una gran variedad de dispositivos electrónicos que pueden caracterizar su comportamiento, como se ha visto en anterioridad todos los sensores y sistemas que pueden permitir la captura del movimiento. El estudio de las señales

biomecánicas está más cercano a la ingeniería que al área médica, ya que los métodos numéricos se aplican en casi todos los estudios biomecánicos. La investigación se realiza en un proceso iterativo de hipótesis y verificación, incluyendo varias etapas de modelado, simulación por computador y mediciones experimentales.

a. Adquisición de las señales biomecánicas

La adquisición de señales biomecánicas empieza mediante la selección óptima de los sensores necesarios para la actividad mecánica que se desea medir. Este paso a pesar de parecer relativamente simple, implica gran esfuerzo y demanda mucho tiempo debido a la gran cantidad de sensores disponibles en el mercado actual, sus diversas características, los costos y los aspectos de disponibilidad regional. Muchos sensores especializados en el área médica son difíciles de conseguir en ciertas áreas geográficas y muchas veces es necesaria su importación o al menos su encargo a otros lugares remotos.

El segundo paso más importante es acoplar los sensores definidos a un sistema de recolección y almacenamiento. En la mayoría de los casos los sensores deben ser ensamblados al sistema de recolección mediante transductores y acoples de diversos tipos que hacen posible la eficiente recolección de la información. Una vez definido estos dos sistemas, es necesario implementar el sistema de medida biomecánica al lugar en donde se desea realizar la comprobación.

Finalmente, se elaboran programas de entrenamiento que generan la información biomecánica necesaria para ser analizada, filtrada y procesada, en donde los programas de entrenamiento varían en función del investigador y según lo que se desee analizar.

b. Procesamiento de señales biomecánicas

Una vez las señales biomecánicas son recolectadas, es necesario realizar transformaciones que implican el análisis de estas mediciones para proporcionar información útil sobre la cual se puedan tomar decisiones o extraer información relevante que están enmarcadas en un contexto predefinido.⁴² A medida que la tecnología avanza, se van descubriendo nuevas formas de procesar estas señales usando una variedad de técnicas, fórmulas matemáticas y algoritmos.

Cuando se trabaja de la mano con herramientas basadas en la electrónica y computación, los análisis efectivos de las señales pueden ser realizadas por métodos

⁴² [Citado en 29 de Marzo de 2016] Biomechanical Signal Processing. Disponible en: <<http://www.embs.org/about-biomedical-engineering/our-areas-of-research/biomedical-signal-processing/>>

que hacen inclusión de *software* y/o *hardware* especializado que pueden trabajar a velocidades humanamente irreproducibles.

Como expone Chang⁴³ en su documento, el enfoque principal del procesamiento de las señales biomédicas estaba hace algunas décadas en el filtrado de señales para eliminar el ruido que puedan dar origen a inexactitudes o errores en el uso de las señales. Parte de este problema sigue afectando a los investigadores actuales, ya que, si bien algunas fuentes de ruido o problemas se han ido corrigiendo o al menos minimizando con el paso del tiempo, han aparecido otros tipos de inconvenientes que han sido palpables únicamente con el desarrollo de la más reciente tecnología o con la rigurosidad que requieren algunos procesos para ser útiles. Cabe resaltar que el campo de procesamiento de las señales biomédicas en general continúa creciendo a un ritmo sin precedentes gracias al desarrollo de varios instrumentos biomédicos novedosos tales como ultrasonido, equipos de resonancia magnética (MRI), equipos para tomografía por emisión de positrones (PET), evidenciando que las técnicas de procesamiento de señales en sus diferentes niveles (segmentación, seguimiento de movimiento, análisis de secuencias, y el tratamiento estadístico) contribuyen significativamente al avance de la biomedicina.

Con respecto a las señales biomecánicas, los métodos de captura de movimiento son en sí mismos un tipo específico de procesamiento directo de dichas señales. Se utiliza en aplicaciones militares, entretenimiento, deportes, aplicaciones médicas y para la validación de la visión artificial y la robótica. En el cine y el desarrollo de videojuegos, la información extraída de este proceso sirve para animar modelos digitales de personajes en programas de animación por computador tanto para 2D o 3D⁴⁴.

Un procesamiento muy frecuente en señales biomecánicas es el análisis en base a la frecuencia, ya que, en eventos médicos, esta variable juega un papel importante para la determinación de síntomas o como indicador de problemas específicos en los humanos. El área de aplicación del procesamiento a este tipo de señales es tan amplia que generalmente el estudio se hace sobre un factor en específico, por ejemplo, la aplicación de estimadores no lineales para la reducción de ruido.

⁴³ CHANG, Hsun-Hsien y MOURA, José María. Biomedical Signal Processing. Biomedical Engineering and Desing Handbook, McGraw Hill, 2010. p. 559-579.

⁴⁴ [Citado en 29 de Marzo de 2016] NY Castings y GATT, Joe. *Motion Capture Actors: Body Movement Tells the Story*. Disponible en: <http://www.nycastings.com/dmxreadyv2/blogmanager/v3_blogmanager.asp?post=motioncaptureactors>

c. Señales biomecánicas en extremidades superiores

En el cuerpo humano, las señales biomecánicas que pueden ser recolectadas son numerosas debido a que hay una gran cantidad de movimientos que pueden realizarse, en donde para cada caso de aplicación se opta por tomar el modelo físico del área concreta de estudio. En esta investigación, el movimiento biomecánico a ser capturado proviene de las extremidades superiores del cuerpo humano, es decir de los brazos. Para un análisis biomecánico completo, se debe realizar el modelo anatómico y funcional de las extremidades superiores del cuerpo humano, un trabajo extenso y complejo que requiere de profesionales con amplios conocimientos en la estructura física del cuerpo humano y herramientas de modelado matemático^(*). En este apartado, se explica brevemente los movimientos que las extremidades superiores del cuerpo humano pueden tener, así como algunas características físicas de los mismos.

Los términos anatómicos de movimiento en las extremidades superiores del cuerpo humano se utilizan para describir las acciones de los músculos en el esqueleto y su resultado en forma de desplazamiento. Los músculos se contraen o estiran para producir un movimiento en las articulaciones y estos movimientos son los que posteriormente se pueden capturar y analizar usando elementos especializados, en especial aquellos de tipo electrónico.

Para la correcta comprensión de los términos que describen el movimiento de las extremidades superiores del cuerpo presentados a continuación, se debe asumir que el cuerpo comienza en la posición anatómica. Cada par de movimientos está compuesto de su movimiento anatómico y opuesto, llamado movimiento antagónico, para facilitar su comprensión⁴⁶.

- Movimiento de Flexión – Extensión

La flexión y la extensión para los miembros superiores son movimientos que se producen en el plano sagital, es decir, perpendiculares una paralela vertical que divide al cuerpo humano de cabeza a pies en dos partes iguales. La descripción básica de este par de movimientos es de aumento o disminución del ángulo entre dos partes del cuerpo⁴⁷.

(*) Para información biomecánica completa se sugiere seguir el texto *Biomechanics of the upper limbs: Mechanics, Modeling, and Musculoskeletal Injuries* Freivalds, Andris.

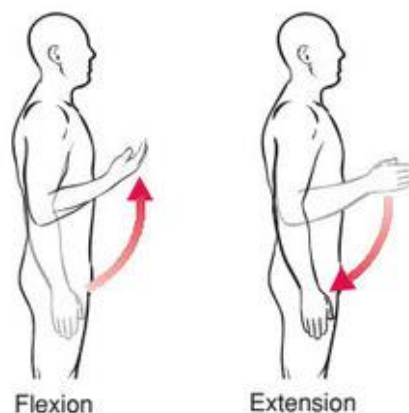
⁴⁶ [Citado en 28 de Abril de 2016] Movements of the Upper Limb. Learning Modules - Medical Gross Anatomy. p. 1-18. Disponible en https://www.med.umich.edu/lrc/coursepages/m1/anatomy2010/html/modules/upper_limb_module/Module-UpperLimb.pdf

⁴⁷ THOMAS, R. Muscles of the Shoulder and Upper Arm. Illinois State University, 2013.

La Flexión de un miembro superior es el movimiento que disminuye el ángulo entre el antebrazo y el brazo, ya que la Flexión con punto de apoyo en el codo está disminuyendo el ángulo entre los huesos cúbito y radio hacia el húmero. En pocas palabras, hace que el brazo se contraiga.

La Extensión de un miembro superior es el movimiento que aumenta el ángulo entre el antebrazo y el brazo, ya que la Extensión con punto de apoyo en el codo está incrementando el ángulo entre los huesos cúbito y radio hacia el húmero. En pocas palabras, hace que el brazo se estire.

Figura 5. Movimiento de Flexión y Extensión visto desde un plano parasagital.



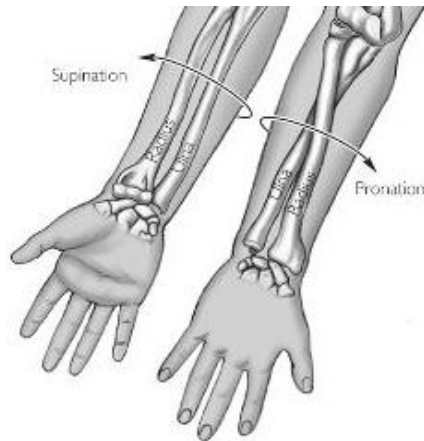
Fuente: Dr. Nolan Lee. Flexion & Extension: Sagittal Plane Movements. Anatomy Language: Part II. Disponible en <<http://www.nolanlee.com/blog/anatomy-language-part-ii>>

- Movimiento de Pronación – Supinación

Este par de movimientos corresponde a una rotación del brazo longitudinalmente, teniendo como punto de apoyo el hombro. Para hacerlo un poco más claro, es el movimiento que se genera al dar vuelta a la mano dejando la palma hacia arriba o hacia abajo, manteniendo el brazo totalmente extendido justo en frente de usted, la mano apuntando hacia el frente, y la posición invariante del codo y del hombro.

El movimiento generado al pasar la mano en posición “boca arriba” a la posición en donde se oculta la palma, se llama pronación. Si el movimiento se realiza de manera contraria, es decir al pasar la mano en posición “boca abajo” a la posición en donde se muestra la palma, se llama supinación.

Figura 6. Movimiento de Pronación y Supinación visto desde un plano frontal.



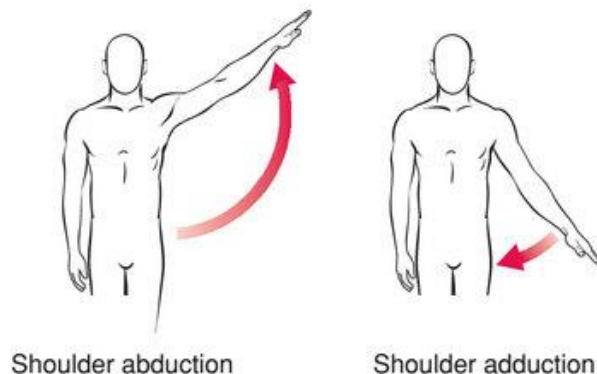
Fuente: *Mosby's Medical Dictionary*, 2009.

- Movimiento de Abducción – Aducción

Son dos movimientos que describen el acercamiento o alejamiento de los brazos tomando como punto de referencia la línea media del cuerpo y visto desde el plano coronal.

La Abducción es específicamente el movimiento que hace alejar los brazos de la línea media del cuerpo, en donde el movimiento del hombro eleva los brazos a los lados del cuerpo. La Aducción por su parte es el movimiento que hace acercar los brazos a la línea media del cuerpo, en donde el movimiento del hombro desciende los brazos ubicándolos a los lados del cuerpo.

Figura 7. Movimiento de Abducción y Aducción visto desde un plano coronal.



Fuente: Dr. Nolan Lee. Abduction & Adduction: Coronal Plane Movements. Anatomy Language: Part II. Disponible en <<http://www.nolanlee.com/blog/anatomy-language-part-ii>>

4.1.11 Sensores.

Los sensores son aquellos elementos que permiten detectar eventos o cambios de su entorno y proveen una señal de salida o aviso correspondiente. Un sensor es un transductor, el cual cambia las señales de entrada por otras de salida, en donde generalmente se usan impulsos eléctricos⁴⁸. Un buen sensor posee una medición precisa de la variable detectada, una baja (idealmente nula) detección de otras variables relacionadas a la de trabajo y una correcta respuesta o señal de salida que permita interpretar o dar a conocer el estado de la variable medida.

En biomecánica y captura de movimiento es habitual hallar sensores que permitan recolectar datos de forma eficiente, confiable y robusta, en donde un gran número de aplicaciones se basan en una pluralidad de ellos que se comunican usando redes de datos. Los sensores usados dentro de estos escenarios son de diversos tipos, construcción y tecnología, enfocándose principalmente en suplir las necesidades que el diseñador tenga para realizar a cabo el procedimiento requerido.

Hoy en día con el avance de la tecnología y de técnicas en construcción de elementos electrónicos, se cuenta con una amplísima gama de sensores que cubren todas las necesidades del mundo actual, pero muchas veces por su elevado costo o baja disponibilidad no son accesibles o asequibles.

Dentro de este universo de dispositivos se encuentran tecnologías que lideran la recolección de información biomecánica y cinemática, que a gran escala se dividen en dos grupos. El primer grupo comprende todos los métodos de recolección de información por vía óptica, los cuales capturan los datos a través de imágenes y video mediante múltiples cámaras para triangular la posición de un objeto en el espacio, como es el caso del sistema OptiTrack™⁴⁹.

Dentro de los métodos de recolección de información óptica hay sistemas más o menos robustos que implican una gran cantidad de técnicas para realizar el procesamiento de la señal. Una gran variedad de los sistemas ópticos actuales se apoya en un sistema de marcadores que se colocan sobre los objetos a rastrear, lo cual permite al software de procesamiento generar los datos necesarios.

Otros sistemas usan técnicas asistidas por diversos parámetros, por ejemplo, la profundidad de campo y siluetas, usado principalmente en el sistema Kinect de Microsoft⁵⁰.

⁴⁸ SZE, Simon M. Semiconductor Sensors. Wiley-Interscience, 1994. p. 13-18.

⁴⁹ [Citado en 27 de Marzo de 2016] OptiTrack™. Disponible en <<https://www.optitrack.com/>>

⁵⁰ [Citado en 27 de Marzo de 2016] Meet Kinect for Windows. Disponible en: <<https://dev.windows.com/en-us/kinect>>

El segundo grupo de tecnologías desarrolladas para la captura de movimiento está compuesto por los sensores no ópticos como lo son los sensores inerciales^{51,52}, los cuales pueden llegar a presentar cierta dificultad debido a que los datos extraídos a partir de ellos pueden ser ambiguos y necesitan de un modelo matemático específico para ser procesados; los sensores magnéticos, que producen pequeñas variaciones magnéticas alrededor de ellos, los cuales son detectados por el receptor con pequeñas bobinas y finalmente los sensores de tipo electromecánico, como el caso de electrogoniómetros, un sistema de sensores compuesto por algún tipo de transductor diseñado para estimar los ángulos de una articulación cuando se coloca en el cuerpo humano, o el sistema de captura Gypsy desarrollado por Meta Motion⁵³.

Figura 8. Sensores para biomecánica y captura de movimiento.



Fuente: Autor

Infortunadamente, los sensores de tipo óptico para captura de movimiento son considerablemente más costosos y difíciles de conseguir, como el caso de OptiTrack™ en donde su utilización también requiere de entrenamiento especializado y una infraestructura particular para realizar las mediciones y pruebas

⁵¹ SHAEFFER, Derek K. MEMS inertial sensors: A tutorial overview. IEEE Communications Magazine, 2013. p. 100-113.

⁵² YAZDI, Navid, *et al.* Micromachined Inertial Sensors. Invited paper. Proceedings of the IEEE, Vol. 86, No. 8, 1998. p. 1640-1659.

⁵³ [Citado en 27 de Marzo de 2016] Gypsy 5™ by Meta Motion. Disponible en: <<http://metamotion.com/>>

necesarias. Los sensores más relevantes para este caso de estudio están centrados en los no ópticos, en donde los sensores de tipo inercial y magnéticos toman un protagonismo interesante debido a su fácil disponibilidad y relativo bajo costo, de los cuales se hablará subsecuentemente.

4.1.12 Tecnología MEMS

Los sistemas Microelectromecánicos (abreviados MEMS por sus siglas en inglés, *Micro-Electro-Mechanical Systems*) es una tecnología de reciente desarrollo que puede ser definida, en su forma más generalizada, como elementos mecánicos y electromecánicos miniaturizados y encapsulados, hechos con una técnica de micro y nano fabricación.

Los sistemas MEMS están hechos de componentes de tamaño muy reducido, los cuales oscilan entre 1 y 100 micrómetros de longitud, y un dispositivo basado en MEMS puede llegar a ser tan pequeño como 20 micrómetros hasta un milímetro, y usualmente contienen de una manera embebida un microprocesador y componentes variados que pueden interactuar con diferentes medios como lo son microsensores y microactuadores⁵⁴, aunque también hay diversidad de dispositivos para un rango muy amplio de usos, por ejemplo estructuras para modificación genética en el campo de la biología.

Internamente, los dispositivos MEMS pueden variar desde estructuras simples que pueden contener elementos móviles (rotatorios o lineales) hasta intrincados laberintos electromecánicos de elementos múltiples bajo el control de diversos elementos electrónicos también fabricados bajo esta tecnología⁵⁵.

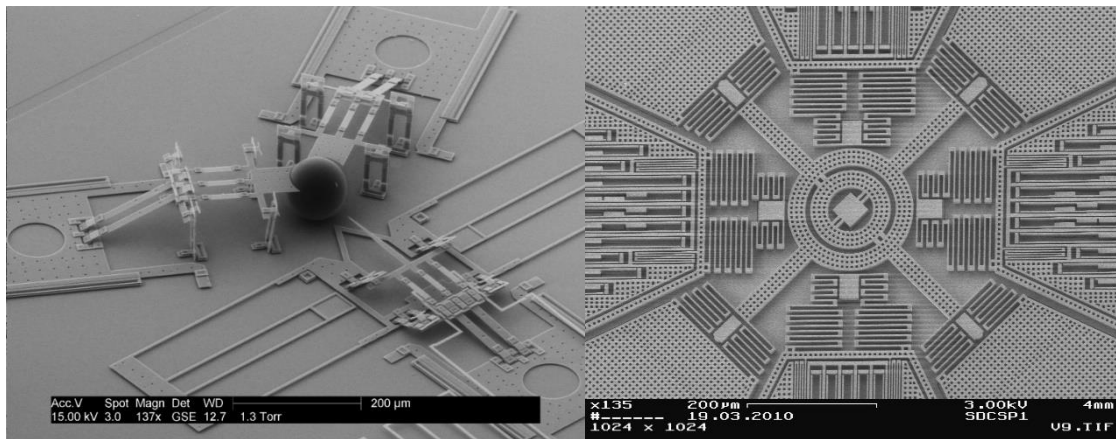
Algunos de los elementos MEMS utilizados en la actualidad son por ejemplo los sensores incorporados en la estructura de un ala de avión para que se pueda detectar el flujo de aire por el cambio de la resistencia de su superficie, dispositivos de conmutación óptica que pueden cambiar las señales de luz a través de diferentes caminos a velocidades de conmutación increíblemente rápidas, o sistemas de calefacción y refrigeración producida por el sensor en sí mismo que mejoran drásticamente el ahorro de energía.⁵⁶

⁵⁴ ANGELL, James B, *et al.* Silicon Micromechanical Devices. Scientific American, 1983. p. 44–55.

⁵⁵ [Citado en 27 de Marzo de 2016] MNX, MEMS and Nanotechnology Exchange. Disponible en: <<https://www.mems-exchange.org/MEMS/what-is.html>>

⁵⁶ [Citado en 30 de Abril de 2016] TECHTARGET, micro-electromechanical systems (MEMS). Disponible en: <<http://internetofthingsagenda.techtarget.com/definition/micro-electromechanical-systems-MEMS>>

Figura 9. Vista de un sistema MEMS microscópicamente.



La imagen a la izquierda corresponde a un nano inyector. Crédito a Brian Jensen/BYU. Disponible en <<http://phys.org/news/2014-05-mems-nanoinjector-genetic-modification-cells.html>>. La imagen de la derecha corresponde a una nano estructura de prueba. Crédito a Instituto de Tecnología Maharashtra (ISSS). Disponible en: <<http://www.mitpune.com/nwmems&ms/>>

La tecnología MEMS no solo permite miniaturizar elementos ya creados con anterioridad, por ejemplo, micrófonos o detectores ópticos en cámaras digitales, sino que también abre la posibilidad de crear dispositivos nuevos incapaces de ser fabricados a través de otras tecnologías, como es el caso de los sensores de tipo inercial. El futuro se expande cada vez más al incluir esta tecnología a dispositivos embebidos en la cotidianidad, desde teléfonos celulares hasta cuadricópteros.

a. Acelerómetros Basados en MEMS

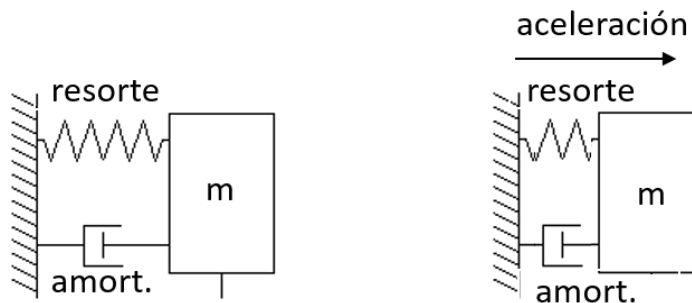
Un acelerómetro es un tipo de sensor dedicado a medir una aceleración lineal estática aplicada sobre el mismo. Este tipo de aceleración es el que específicamente se crea cuando hay un cambio de *momentum*, y no la tasa cambio de velocidad de un sistema que ya se encuentra en movimiento (aceleración dinámica). Un acelerómetro puede estar construido de diversas maneras, lo que da origen sensores de tipo mecánico, piezoeléctricos, de efecto Hall, electromagnéticos, ferroeléctricos, ópticos, basados en condensador o en tecnología MEMS, que finalmente combina dos o más técnicas de las anteriormente mencionadas.

Aquellos acelerómetros basados en MEMS están creados a partir de su equivalente mecánico pero reducido en escala y con la adecuación de elementos electrónicos que facilitan su lectura. Según lo expuesto por Šprdlík⁵⁷, el núcleo del sensor está

⁵⁷ ŠPRDLÍK, Otakar. Detection and Estimation of Human Movement Using Inertial Sensors: Applications in Neurology, Czech Technical University in Prague, 2012.

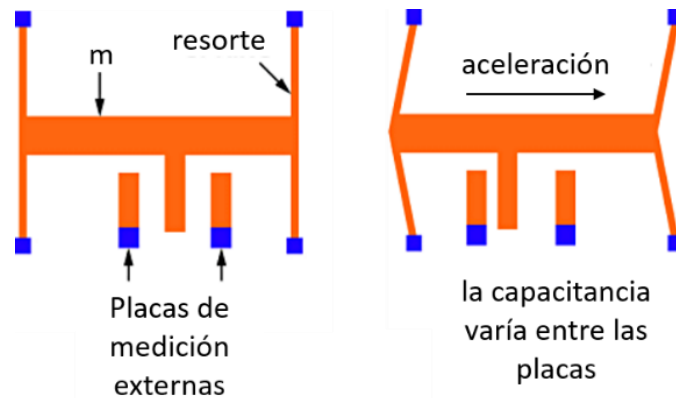
formado por una masa sujeta de la plataforma del sensor a través de un resorte y un amortiguador. Cuando el sensor se acelera, la masa se mueve en la dirección opuesta a la del movimiento ocurrido, y este desplazamiento es proporcional a la fuerza aplicada. Generalmente en un sistema MEMS, la aceleración puede determinarse hasta en tres ejes, en los cuales se hace uso de la medición de la capacidad de desplazamiento y se transforma dicha medida en un valor de fácil lectura, como el cambio de voltaje de una salida eléctrica o de manera digital a través de un protocolo de comunicación definido.

Figura 10. Representación de un acelerómetro mecánico.



Fuente: Desconocido, editado al español.

Figura 11. Representación de un acelerómetro basado en MEMS



Fuente: Rob O'Reilly. Imagen original disponible en: <http://www.sensormag.com/sensors/acceleration-vibration/sonic-nirvana-mems-accelerometers-acoustic-pickups-musical-i-5852>. Editado al español.

Comparando directamente el modelo de un sistema mecánico con un sistema MEMS se puede apreciar que el concepto básico de ingeniería se mantiene sin modificaciones. Cabe resaltar que en el sistema MEMS, los puntos cuadrados de

sujeción es el propio sustrato interno del sensor, el cual actúa de referencia mecánica. El desplazamiento de la masa es proporcional a la aceleración suministrada modificada por los elementos que componen el sensor, entendiendo al amortiguador simplemente como un supresor de frecuencias indeseadas (ruido) que el resorte pueda inducir en la masa una vez ejercida la aceleración. La ecuación que modela al acelerómetro de una forma general y básica es:

$$d_g = \frac{m}{k} = \frac{g}{\omega_0^2} \quad (83)$$

En donde d_g es el desplazamiento por unidades de gravedad, m es la masa del elemento, k la constante de elasticidad del resorte, ω_0 la frecuencia angular de resonancia y g la gravedad de la tierra. La aceleración registrada a través del desplazamiento es la diferencia entre la aceleración instantánea y el estado de caída libre. En el caso de una caída libre, las medidas del acelerómetro serán cero a pesar de que su velocidad aumente gradualmente. Para el caso de un sensor que está situado en la superficie de la Tierra, la única aceleración es normal respecto al plano horizontal y tiene el tamaño de la aceleración de la gravedad.

A pesar de la existencia de un supresor de ruido, el sensor experimenta situaciones variadas y no solo mecánicas que afectan la medición precisa del valor de la aceleración. El ruido es una característica propia de cada sensor ya que en el intervienen diversos factores como la disposición de los elementos, las técnicas de fabricación empleadas, los materiales usados y factores ambientales. Los errores más frecuentemente encontrados en los acelerómetros basados en MEMS son la presencia de deriva a través del tiempo, causada en gran parte por cambios de temperatura ya que los sensores son muy susceptibles a pequeñas variaciones; la no linealidad de la salida, la no ortogonalidad y la desalineación de los ejes del sensor con respecto a un marco de referencia, que puede ser la tierra en sí misma.

La desviación o deriva a través del tiempo es un problema que, si bien se puede minimizar con una calibración adecuada del sensor, su corrección definitiva no es factible debido a la gran cantidad de factores que pueden generarlo. El procedimiento de calibración consiste en someter al sensor a un número de orientaciones variadas con respecto a la gravedad, lo cual ayuda al mismo a precisar la dirección de la fuerza gravitacional y usarla como referencia para localizaciones posteriores.

Otro tipo de error producido en este tipo de acelerómetros es el Ruido de Johnson-Nyquist, de característica semejante a un ruido blanco y de tipo gaussiano. Es generado por la agitación térmica de los portadores de carga, generalmente electrones dentro de un conductor en equilibrio, lo que sucede con independencia

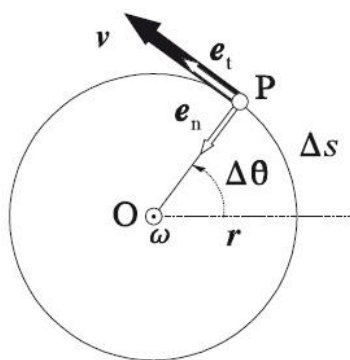
del voltaje aplicado⁵⁸. Este tipo de error es generalmente ignorado en sensores de mayor tamaño ya que la cantidad de ruido creado es despreciable. También se tiene en cuenta el Movimiento Browniano, un tipo de movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido. Habitualmente este tipo de errores suelen ser corregidos por un procesamiento posterior a la señal de salida, ya que la eliminación de la fuente de ruido supone un desafío de ingeniería por fuera del alcance de la población general.

b. Giroscopios Basados en MEMS

El giroscopio original es un dispositivo netamente mecánico el cual mide la orientación en el espacio de algún elemento móvil o vehículo. Está compuesto generalmente de una rueda giratoria o disco en el que el eje de rotación es libre de moverse en cualquier orientación por sí mismo. Cuando el objeto en movimiento o vehículo gira, la orientación de este eje no se ve afectado por la inclinación o la rotación del montaje según la conservación del momento angular.

La diferencia de un giroscopio y un acelerómetro es que el primero usa la gravedad terrestre para ayudar a determinar la orientación, midiendo el cambio en ángulo desde la última posición, mientras que el acelerómetro está enfocado a medir las aceleraciones no gravitacionales que ocurren en el espacio terrestre. Este dispositivo mecánico como tal fue inventado en 1852 por Leon Foucault, montando una masa rotatoria en un soporte de Cardano para demostrar la rotación terrestre. Si se impiden ciertos movimientos del soporte del giroscopio, éste se alinea con el norte magnético pudiendo ser usado como una brújula, lo cual permitió la invención de la brújula giroscópica llamada girocompás⁵⁹.

Figura 12. Representación de la medida de un giroscopio.



Fuente: Desconocido, bajo licencia *Creative Commons*.

⁵⁸ NYQUIST, Harry. Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors. Physical Review Letters, Physical Review, and Reviews of Modern Physics, 1928.

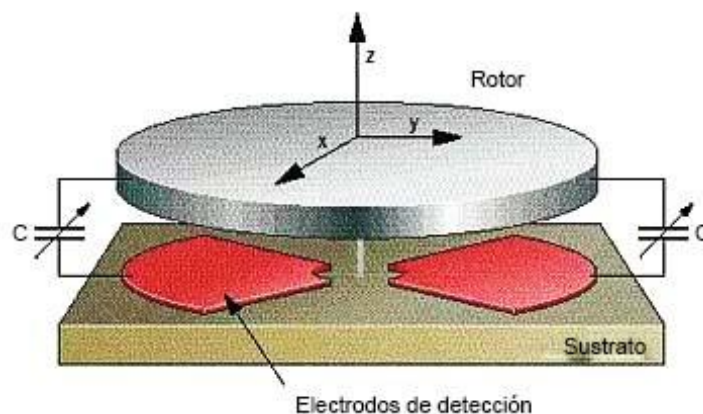
⁵⁹ [Citado en 28 de Marzo de 2016] Giróscopo. Disponible en <<https://es.wikipedia.org/wiki/Giróscopo>>

En donde el giroscopio brindará la información correspondiente a la velocidad de rotación de un elemento que sigue una trayectoria circular de referencia, con unidades en rad/s.

Las aplicaciones industriales del invento de Foucault fueron variadas, por ejemplo, como sistema de guía a los primeros torpedos, como asistente en la navegación inercial en aviones, misiles y demás elementos aeroespaciales construidos antes de la aparición del GPS. La tecnología reciente ha permitido la fabricación de diversos giroscopios no mecánicos que se basan en la funcionalidad mas no en el principio de operación original de Foucault, y miden la velocidad angular aplicada sobre ellos, como es el caso de los giroscopios de fibra óptica, el giroscopio resonador hemisférico, los giroscopios basados en estructuras vibrantes, los basados en anillos láser, los basados en MEMS, entre otros, que resuelven problemas cotidianos en aviación, suplen funciones adicionales y de entretenimiento en computadores, consolas de video portátiles, tabletas, teléfonos celulares, relojes y demás.

Específicamente hablando de los giroscopios basados en MEMS, están contruidos con base en el funcionamiento de estructuras vibrantes, cuyo principio físico subyacente es que un objeto en oscilación tiende a continuar vibrando en el mismo plano, incluso si punto de apoyo o marco de referencia gira o se mueve. El efecto Coriolis hace que el objeto ejerza una fuerza sobre su soporte, y mediante la medición de esta fuerza, la velocidad angular puede ser determinada. Las estructuras vibrantes se encapsulan junto con circuitos integrados que proporcionan salidas eléctricas (analógicas o digitales) y brindan soporte para múltiples ejes a un precio considerablemente reducido.

Figura 13. Representación de un giroscopio de estructura vibrante de dos ejes fabricado por Bosch Corporation.



Fuente: epondevice.com. Original de SONG, C. Commercial vision of silicon based inertial sensors. Tech Dig 9th Intl. Conf Solid State Sensors and Actuators, 1997.

Algunos otros giroscopios están basados en otras formas de estructuras vibrantes, debido a que, si el principio físico se mantiene invariante, se puede jugar con las formas y posiciones de dichas estructuras. Tal es el caso de los sensores EPSON⁶⁰ quienes usan otro modelo de estructura vibrante para sus giroscopios basados en MEMS.

Las características principales que todo giroscopio debe proveer independientemente del método usado para la detección del movimiento son el factor de integración de los dispositivos, ya que, a mayor escala de integración, más robusto el sensor podrá ser; el coeficiente de frecuencia-temperatura, el cual determina ciertas características del sistema como su precisión; la resistencia a impactos debido a las aplicaciones exigentes a las que puedan ser sometidos y finalmente la estabilidad y características de ruido.

Con respecto a la cantidad de ruido y errores que los giroscopios basados en MEMS pueden detectar o generar, son exactamente del mismo tiempo presenciado en los acelerómetros basados en MEMS. Usualmente todos los giróscopos vienen con una calibración hecha por el fabricante en términos del nivel de cero velocidad angular, pero esta corrección a la desviación puede estar sujeta a cambios dada las propiedades físicas de los elementos con los cuales los giroscopios están contruidos.

La compensación de deriva y error iterativo mediante una calibración sencilla para giroscopios de este tipo es definida por Looney⁶¹, en donde propone usar un sistema de referencia angular confiable desde donde se pueda seleccionar un punto pivote fijo en donde el sensor es colocado, para luego ser movido a varios ángulos establecidos a ciertas velocidades angulares. El desplazamiento o deriva en las mediciones pueden ser tomadas como un factor de corrección estimado para ayudar a mejorar la señal de salida del sensor. Esta calibración difiere a la de un acelerómetro, ya que en un giroscopio los errores son más difíciles de medir debido a que se producen mediante condiciones dinámicas.

Así mismo, para la estimación de sólo las ganancias de las salidas, es posible utilizar un procedimiento que incluye rotaciones del giroscopio entre las orientaciones conocidas en vez de una precisa referencia de velocidad angular.

c. Magnetómetros Basados en MEMS

Un magnetómetro es un dispositivo que sirve para medir, tanto en fuerza como en dirección, una determinada señal magnética. Puede tener dos propósitos principales:

⁶⁰ [Citado en 28 de Marzo de 2016] Gyro sensors - How they work and what's ahead. Disponible en <http://www5.epsondevice.com/en/information/technical_info/gyro/>

⁶¹ LOONEY, Mark. A Simple Calibration for MEMS Gyroscopes. Analog Devices, EDN Europe, 2010. p. 28-31.

realizar una cuantificación de la magnetización de un material magnético o ferromagnético, o para medir la fuerza y, en algunos casos, la dirección del campo magnético en un punto en el espacio.

Desde el punto de vista sensorial, los magnetómetros son simplemente detectores de campo magnético. Existen diversos tipos de magnetómetros, desde los simples dispositivos creados precariamente para la detección de campos magnéticos hasta tecnologías avanzadas de última generación. El primer magnetómetro usable fue construido en 1833 por Carl Friedrich Gauss que dieron paso a tecnologías más recientes como los sensores de efecto Hall usados hoy en día.

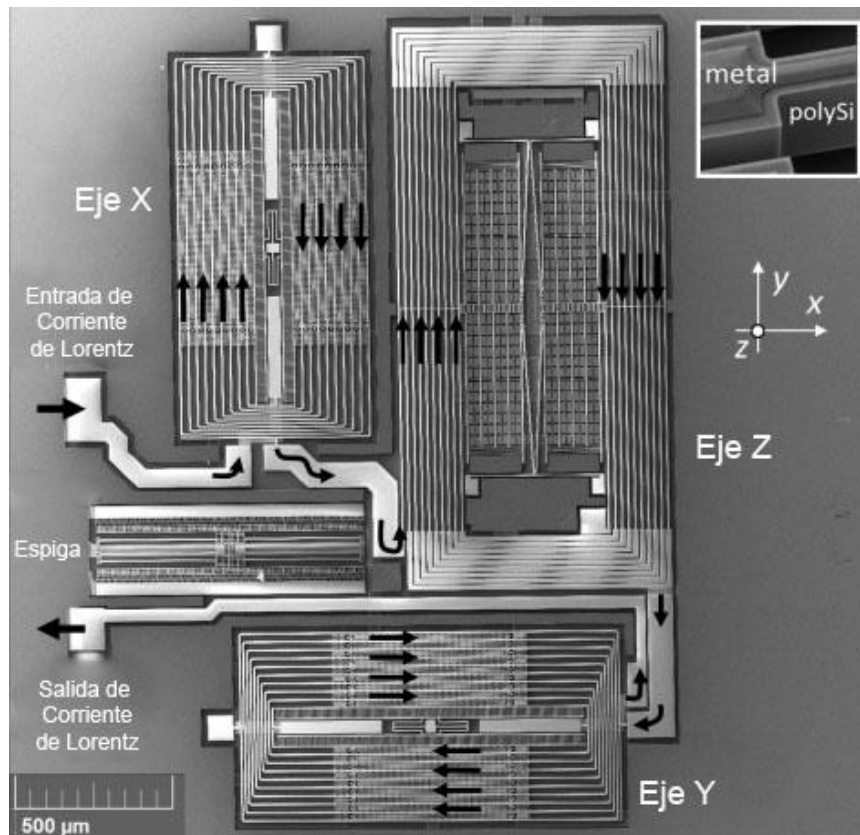
Hay dos tipos básicos de medición que un magnetómetro puede realizar. Los magnetómetros vectoriales miden los componentes del vector de un campo magnético. Los magnetómetros totales de campo (escalares) miden la magnitud del campo magnético vectorial. Dentro de las aplicaciones más comunes de estos dispositivos se encuentran el estudio del campo magnético de la Tierra, expresando los componentes del vector de campo en términos de declinación (el ángulo entre la componente horizontal del vector de campo y el norte magnético) y la inclinación (el ángulo entre el vector de campo y la superficie horizontal)⁶².

Un detector de campo magnético solo puede ser usado como una brújula si el único campo a medir es el magnético terrestre. La mayoría de aplicaciones de un magnetómetro digital moderno es propiamente como brújula digital de estado sólido.

Los magnetómetros también tienen diversas implementaciones, como por ejemplo los magnetómetros basados en Muestras Vibrantes, basados en extracción de campos pulsantes, magnetómetros de torque, magnetómetros de fuerza de Faraday, magnetómetros ópticos y basados en MEMS. En este último tipo de magnetómetros llamados habitualmente sensores de campo magnético, se hace el uso de la fuerza de Lorentz para detectar y medir el campo circundante, el cual produce un cambio en el voltaje o la frecuencia de resonancia la cual se puede medir electrónicamente, o genera un desplazamiento mecánico que se puede medir ópticamente, depende de la tecnología de fabricación usada.

⁶² [Citado en 28 de Marzo de 2016] Magnetometer. Disponible en <<https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetometer/>>

Figura 14. Magnetómetro basado en el principio de la fuerza de Lorentz construido con tecnología MEMS.



Fuente: *High-performance MEMS magnetometers*. Disponible en: <http://risorse.dei.polimi.it/sensorlab/Research.php/> Imagen original del Politécnico de Milán. Laboratorio de Sensores y detectores SanDLab.

Este magnetómetro posee capacidad para detectar las variaciones de campo en sus tres ejes usando una única alimentación de corriente. Dichos magnetómetros pueden ser operados fuera de resonancia en variaciones por encima de cientos de Hz, en lugar de la operación resonante convencional. Este principio de trabajo proporciona una mayor estabilidad, menor ruido termomecánico alcanzable en grandes anchos de banda, a costa de una señal de salida inferior, según lo explica el Laboratorio de Sensores y detectores SanDLab.

El problema más grande de los magnetómetros es creado por efectos de la temperatura⁶³: cuando esta aumenta, el módulo del material de Young utilizado para fabricar la estructura móvil se disminuye en área, lo que genera un debilitamiento de la estructura móvil.

⁶³ [Citado en 28 de Marzo de 2016] MEMS magnetic field sensor. Disponible en https://en.wikipedia.org/wiki/MEMS_magnetic_field_sensor/

Mientras tanto, la expansión térmica y la conductividad térmica aumentará con la temperatura de la inducción, creando una tensión interna en la estructura móvil. Esto causa el desplazamiento de la frecuencia de resonancia ya la detección de desplazamiento de frecuencia será inválida o menos precisa. Además, tal como sucede en los acelerómetros y giroscopios basados en MEMS, el aumento de temperatura generará mayor ruido de Johnson y creará grandes fluctuaciones de ruido mecánico. Una corrección de estos fenómenos puede ser alcanzado con un sistema óptimo de control de temperatura interno.

Algunos otros errores que pueden ser producidos en la medición tiene que ver con interferencias de otros campos magnéticos, como lo señala Šprdlík⁶⁴, produciendo trastornos cuando hay presencia de materiales magnéticos fijos que se mueven o no al mismo tiempo con el magnetómetro y por el campo magnético causado por las corrientes eléctricas fluctuantes. El primer grupo de los trastornos es causado por materiales de con propiedades ferromagnéticas (imanes permanentes) y los efectos de hierro dulce, aquellos materiales que deforman el campo magnético de la Tierra; mientras que el segundo grupo está dado por líneas de transmisión de energía, por ejemplo.

d. Unidades de Medición Inercial

Abreviadas como IMU por sus iniciales en inglés, las Unidades de Medición Inercial son dispositivos electrónicos autocontenidos, en su mayoría basados en MEMS, que reúnen dos o más sensores de tipo inercial. En las versiones más modernas, dicho conjunto de sensores se suministra con un módulo de procesamiento central o controlador digital para proveer una salida de datos centralizada. Los sensores que generalmente se agrupan en una IMU son dos: Acelerómetro y Giroscopio. Algunas IMU se integran con un sistema de georreferenciación como GPS o GLONASS, sensores como medidores de presión barométrica, altímetro digital o magnetómetro; estos sistemas son llamados Unidades de Procesamiento de Movimiento (MPU).

Las aplicaciones más usuales de las IMU se presentan en el control de aeronaves, incluidos los vehículos aéreos no tripulados, helicópteros a pequeña escala, cuadricópteros; en uso militar como misiles guiados o navegación marítima; en la industria de la electrónica de consumo como apoyo de estabilización en cámaras digitales profesionales o vehículos de transporte personal auto balanceados y en la industria aeroespacial, incluyendo los satélites y sondas enviadas al espacio.

Al tener contenida una matriz sensorial de tipo inercial, las IMU son dedicadas a menudo para la medición lineal y angular de movimiento, el análisis de la fuerza específica de un objeto. Una IMU funciona mediante la detección de la tasa de

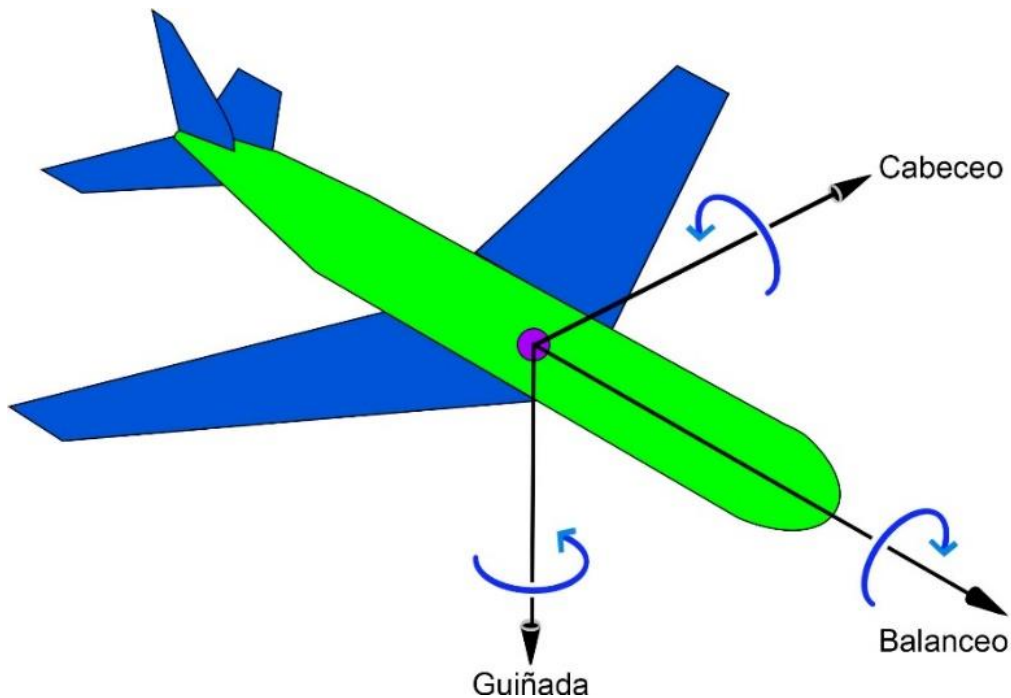
⁶⁴ ŠPRDLÍK, Otakar. Detection and Estimation of Human Movement Using Inertial Sensors: Applications in Neurology, Czech Technical University in Prague, 2012.

aceleración actual usando los acelerómetros, detecta cambios en los atributos de rotación usando los giroscopios.

e. Unidad de Procesamiento de Movimiento

La fusión de datos de estas medidas reportadas por un MPU resulta en una información tridimensional acerca del movimiento, que puede ser visto desde el punto de vista de la navegación como los movimientos de cabeceo, balanceo y guiñada.

Figura 15. Ejes principales de una aeronave.

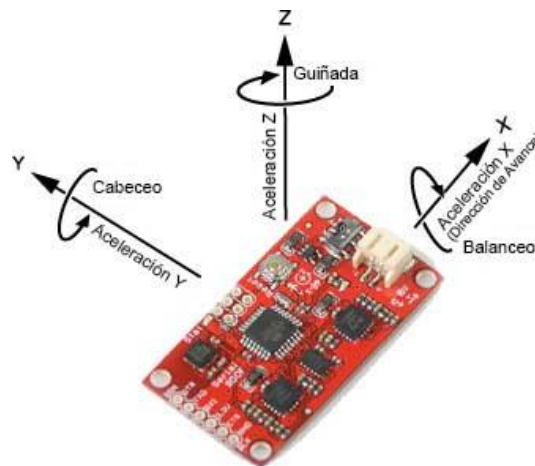


Fuente: Desconocido, bajo licencia *Creative Commons*, adaptada al español

El meneo de una aeronave posee tres ejes simétricos que describen el comportamiento en tres dimensiones. El eje del movimiento de cabeceo es paralelo a las alas de un avión y corresponde al cambio de “punta y cola”.

El eje del movimiento de balanceo es perpendicular a las alas de un avión y corresponde al cambio de “inclinación hacia la derecha o izquierda”. Por último, el eje del movimiento de guiñada es normal a las alas de un avión y corresponde al cambio de “rotación sobre su propio eje”. Estos mismos movimientos son detectados por las MPU.

Figura 16. Ejes principales de una aeronave detectados por una MPU.



Fuente: Autor. Imagen principal: Sparkfun.

Usualmente, un procesador embebido en la MPU realiza cálculos variados para determinar las componentes propias de cada sensor y extrae de ellas información relevante acerca de la posición, y por esta razón una MPU es un tipo de SoC. El número de sensores presentes en la MPU y el número de ejes que cada uno de ellos determina el número de grados de libertad que el dispositivo es capaz de detectar.

Un grado de libertad, expresado como *Degree of Freedom* (DOF), se refiere al movimiento de un cuerpo rígido dentro del espacio. Podría ser explicado como las diferentes maneras básicas en las que un objeto puede moverse. Sólo hay 6 DOF en total, los cuales se pueden dividir en traslaciones (adelante/atrás, arriba/abajo, derecha/izquierda) y rotaciones (Cabeceo, Balanceo y Guiñada)⁶⁵.

Muchas veces es habitual encontrar MPU que se publicitan como 9 o 10 DOF, cuando en realidad solo existen 6 DOF. Esta confusión de parámetros se puede deber a que algunos fabricantes de IMU y MPU publicitan los grados de libertad basado en la definición estadística y no mecánica, en donde un grado de libertad puede definirse como el número mínimo de coordenadas independientes que pueden especificar la posición del sistema completo. Si se toman los componentes axiales de cada sensor, es decir, la magnitud en los tres ejes de un acelerómetro, la magnitud en los tres ejes de un giróscopo y la magnitud en los tres ejes del magnetómetro, en total se efectúa el monitoreo de 9 ejes, pero esta noción no corresponde con la definición mecánica de DOF porque los tres sensores miden los mismos seis tipos de movimiento. A pesar de la confusión que puede dar a lugar el empleo de un mismo concepto con diferente significado, una MPU de 9 DOF si puede ser potencialmente mejor que una de 6 DOF, ya que, al incorporar tres señales axiales adicionales, se

⁶⁵ UICKER, J. J., *et al.* Theory of Machines and Mechanisms, Oxford University Press, New York, 2003.

puede utilizar la fusión de sensores con el fin de mejorar la calidad de la salida final, pero sin ser capaz de detectar aún los movimientos de traslación. Cuando se habla de una IMU de 10 DOF, hace referencia a la integración de un receptor GPS capaz de detectar las traslaciones, lo que sería en realidad la detección completa de los 6 totales DOF mecánicos existentes.

- MPU-9150 de Invensense

Este dispositivo de marca Invensense referencia MPU-9150™ basada en MEMS es la unidad usada para el desarrollo de la presente investigación. De acuerdo con Invensense⁶⁶, este MPU es el primer dispositivo del mundo fabricado con tecnología SiP con 9 DOF y tecnología MotionTracking (especializada en captura de movimiento) diseñada para un bajo consumo de energía, de relativo bajo costo, y características de alto rendimiento. Dentro de sus tipologías principales se encuentran la combinación de un giroscopio de 3 ejes, acelerómetro de 3 ejes y brújula digital (magnetómetro) de 3 ejes en un mismo chip encapsulado, junto con un DMP capaz de procesar algoritmos complejos de fusión de datos abordo. Las características de esta MPU a nivel técnico se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. Características principales de la MPU Invensense MPU-9150.

Escala completa del Giroscopio [°/s]	Tasa de Ruido del Giroscopio [%]	Escala completa del Acelerómetro [g]	Escala completa del Magnetómetro [μT]	Salida Digital	Voltaje lógico de Operación [V]	Voltaje Nominal de Operación [V]	Dimensiones [mm]
±250 ±500 ±1000 ±2000	0,005	±2 ±4 ±8 ±16	±1200	I ² C	1,8±5%	2,4 ~ 3,46 ±5%	4x4x1
Corriente de operación a máximo proceso [mA]	Modo de bajo consumo en Acelerómetro [μA]@[Hz]	Velocidad de Interfaz I ² C [kHz]	Máxima tolerancia a choque [g]	Direcciones I ² C	ADC	Buffer FIFO	Temperatura de Operación [°C]
4,25	10@1 20@5 70@20 140@40	400	10000	0x68 0x69	3@16bit	1024 Bytes	-40 ~ +85

Fuente: Hoja de especificaciones MPU-9150. www.invensense.com

⁶⁶ [Citado en 29 de Marzo de 2016] Invensense MPU-9150. Disponible en <<http://www.invensense.com/products/motion-tracking/9-axis/mpu-9150/>>

(*) Todas las marcas registradas con el símbolo Trademark (™) en esta sección son propiedad de Invensense Inc.

Figura 17. Tarjeta de desarrollo para MPU-9150.



Fuente: Sparkfun. Imagen propiedad de Sparkfun. Disponible en: <<https://cdn.sparkfun.com/assets/parts/7/3/7/6/11486-04.jpg>>

Sparkfun implementa la MPU-9150 en una tarjeta de prototipo que permite una fácil operación del dispositivo. Esta tarjeta apreciada en la Figura 17 hace que sea sencilla la conexión con pines de separación estándar, resistencias *pull-up* para el bus de datos I²C y un selector de dirección de datos para la comunicación digital.

Dentro de las características más relevantes del DMP incluido dentro de esta MPU se encuentra la opción de deshabilitación selectiva de sensores, autoprueba del dispositivo, parámetros configurables diversos como la velocidad de actualización de los componentes del sistema (desde 1 hasta 8000 Hz), Filtro Pasa Bajos (5 hasta 260 Hz), velocidad de procesamiento de 1 MHz, soporte para interrupciones internas, externas y capacidad de transformación matricial de componentes, contribuyendo de esta manera a una fácil lectura de datos sin importar la forma en cómo el sensor ha sido instalado en la aplicación final.

Se sugiere la lectura adicional de la hoja de especificaciones completa y mapa de registros para la MPU-9150 provista por Invensense en su portal web.

4.1.13 Fusión de datos.

La fusión de datos es una característica que puede proveer los algoritmos de estimación no lineal y en especial el Filtro de Kalman, y hace referencia específicamente a la combinación de información y datos extraídos de diferentes fuentes como por ejemplo sensores, de tal manera que la información resultante tiene menos incertidumbre o error de lo que se esperaría cuando se utilizan las mismas fuentes por separado. Las fuentes de datos utilizadas para un proceso de fusión no son específicas ya que se pueden emplear información recolectada de muchos medios, como es el caso de sensores de diferentes tipos, valores pasados de los

mismos sensores, información acerca del ambiente e información recolectada de sistemas de diversos tipos⁶⁷.

Existen actualmente muchos algoritmos para realizar fusión de datos, como por ejemplo el teorema de límite central, redes Bayesianas, teoría de Dempster–Shafer y finalmente el filtro de Kalman. Específicamente hablando del filtro de Kalman, la fusión de datos es ampliamente utilizada en los sistemas de captura de movimiento biomecánico al tomar datos de varios sensores inerciales o de una combinación de sensores inerciales con sistemas de captura ópticos.

Esta fusión de datos también permite ayudar a corregir diversos problemas como el ruido de una señal, ya que, al obtenerse más información del sistema, el ruido presente en todas las señales en conjunto se puede estimar de una mejor manera dando resultados más precisos. Sin embargo, la fusión de datos supone algunas desventajas, como por ejemplo un incremento del costo computacional requerido para ejecutar el algoritmo.

Para tener una idea de cómo una fusión sensorial funciona, se puede proponer un sistema de referencia con sólo un estado. Se sigue el modelo de Levys¹³, para simplificar aún más el sistema se puede asumir que no se tiene conocimiento del modelo de transición conocido anteriormente como la matriz A .

$$\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} = 1\hat{x}_{k-1} = \hat{x}_{k-1} \quad (84)$$

Como no existe un modelo de transición de estados para el sistema, se puede asumir únicamente que el estado en el tiempo actual es el mismo estado en el tiempo inmediatamente anterior. Como se necesita más de un valor para fusionar los datos, se supondrá que hay dos sensores idénticos que contribuyen igualmente a la estimación del estado, por lo cual la matriz del estado sólo tendrá dos valores.

$$z_k = H\hat{x}_k + v_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_k + v_k \quad (85)$$

Para obtener la matriz R , es necesario recordar que r fue definido anteriormente como la varianza de la señal de ruido en la observación v_k , pero como este sistema tiene más de dos sensores, la matriz R contendrá la covarianza de ambos sensores. La diagonal de la matriz principal contendrá el valor de la varianza para ese sensor. Los elementos que no están en la diagonal principal de la matriz representan la cantidad de ruido del sensor que varía con respecto a la del otro. En la mayoría de aplicaciones, salvo casos específicos, tales valores son cero.

⁶⁷ XIONG, N y SVENSSON, P. Multi-sensor management for information fusion: issues and approaches. Information Fusion, 2002. p. 163–186.

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \quad (86)$$

De esta forma se tienen todos los elementos en forma matricial para ser computados conjuntamente con el resto del algoritmo de Kalman.

4.1.14 Complejidad computacional.

Un problema computacional se entiende como una tarea que puede ser resuelta por un sistema electrónico, microcomputarizado, o también por medio de una aplicación ordenada de pasos matemáticos, tales como un algoritmo⁶⁸.

La complejidad que tiene implícito un problema computacional es muchas veces dependiente del sistema de resolución que se proponga. Por ejemplo, no será lo mismo resolver un problema de cálculo integral en un computador de uso personal a usar una calculadora científica: ambos sistemas acertarán en su respuesta, pero dependiendo de la técnica de solución, puede que requiera más tiempo en un sistema que en otro. Un problema de cualquier tipo es considerado inherentemente difícil si su solución requiere recursos significativos en el sistema de solución, cualquiera que sea el algoritmo o pasos utilizados para resolverlo.

La formalización de la complejidad computacional viene dada por los modelos matemáticos que analizan los algoritmos de diversas maneras para poder cuantificar qué tan difícil o simple es realmente un problema, dentro de los cuales, en la informática moderna, se puede abordar desde indicadores como el tiempo de procesamiento versus la velocidad del procesamiento, el almacenamiento necesario para realizar el algoritmo, la cantidad de comunicación empleada, el número de compuertas en un circuito integrado, entre otros, que definen qué es posible realizar en un sistema y qué no.

Desde el punto de vista algorítmico implementado en un sistema computarizado moderno, un análisis de complejidad computacional puede realizarse de muchas maneras, ya que “no hay una forma mágica para analizar la eficiencia de los algoritmos.”⁶⁹ Generalmente, se promedia un valor de peso asignado a cada función, iteración, estructuras de control y ecuaciones de recurrencia. Un valor frecuente en la complejidad computacional está dado por “la gran O”, el cual se utiliza para clasificar los algoritmos con base en su respuesta a los cambios en el tamaño de entrada, por ejemplo, así como el tiempo de procesamiento de un algoritmo cambia a medida que el tamaño del problema se vuelve extremadamente grande.⁷⁰

⁶⁸ BRASSARD, G y BRATLEY, P. Fundamentos de Algoritmia. Prentice Hall, 1997. p. 461.

⁶⁹ Op. cit. BRASSARD, G y BRATLEY, P. p. 111.

⁷⁰ MOHR, Austin. Quantum Computing in Complexity Theory and Theory of Computation, Southern Illinois University at Carbondale, 2008. p. 2

Para el posterior análisis de la complejidad computacional de los algoritmos de filtro de Kalman presentados en este trabajo, se tendrán en cuenta algunos parámetros indicadores del mismo, de modo que sea un buen estimativo al costo que representa procesar dichos algoritmos en el sistema de captura (*).

- Valor de Complejidad Máxima (VDCM)

El valor de complejidad se halla aproximadamente como lo define Steve McConnell⁷². Este valor mide el número de rutas de ejecución a través de una función o método. Cada función o método tiene una complejidad de uno, e incrementa en uno para cada rama de la declaración como son las instrucciones *if*, *else*, *for*, *foreach*, o *while*. La medida de las sentencias condicionales especiales *if (myBoolean, ValueIfTrue, ValueIfFalse)* agregan un punto al total complejidad. Se añade también un punto de complejidad por cada anidado existente en las operaciones condicionales, como por ejemplo '&&' y '||' e instrucciones lógicas similares.

Las sentencias de tipo *switch* añaden un punto de complejidad para cada salida de un *case*, inclusive teniendo en cuenta los modificadores del flujo del programa, como en el caso de *break*, *Goto*, *return*, *throw*, *continue* o alguna declaración similar, y se añade un cargo para un caso por defecto, incluso si uno no está presente.

- Valor de Complejidad (VDC)

Es una medida de la complejidad global calculada para cada método y para cada función. Se computa como una media aritmética simple de los valores de complejidad proporcionados para cada función del código.

- Número de Declaraciones (NDD)

Una declaración es cualquier instrucción o pseudoinstrucción presente en el procesador. Algunas ramas, como *if*, *for*, *while* y *goto* también se cuentan como declaraciones. Las directivas del preprocesador *#include*, *#define* y *#undef* siempre cuentan como declaraciones. Todas las demás directivas de preprocesador son ignoradas. Se cuentan todos los estados entre cada *#else* o *#elif* y *#endif*.

- Porcentaje de declaraciones por rama (PDR)

Las sentencias que causan una interrupción en la ejecución secuencial de los estados se cuentan por separado. Estos son los siguientes: *if*, *else*, *for*, *while*, *break*,

(*) Con base a la estructura de análisis existente en SourceMonitor. Disponible en: <<http://www.campwoodsw.com/sourcemonitor.html> >

⁷² MCCONNELL, Steve. Code Complete, Microsoft Press, 1993, p.395.

continue, goto, switch, case, default, y return. Hay que tener en cuenta que no se enumeran porque siempre se repetirán durante un determinado tiempo que si se contabiliza.

- Número de Clases (NDC)

Se cuentan sobre la base de las definiciones que posean. En general, las clases se definen en los archivos de cabecera mientras que los métodos normalmente se implementan en archivos separados.

- Métodos por Clase (MPC) y promedio de todos los Métodos por Clase (MPCP)

Es un promedio general para todos los métodos existentes en cada una de las clases, estructuras e implementaciones de métodos de plantilla en un archivo o punto de control, calculado como el número total de métodos, dividido por el número total de clases.

- Número de Saltos/Llamados (NDC)

El número total de llamadas a otros métodos o funciones que se encuentran en el interior de todos los métodos o funciones en un algoritmo.

- Profundidad máxima por bloque (PMB) y profundidad promedio por bloque (PPB)

Es el nivel de intrincamiento que posee una anidación de funciones, lo cual resulta en una profundidad máxima y promedio dentro de un bloque. Al comienzo de cada archivo de nivel de bloque es cero. La escala de profundidad puede llegar hasta valores superiores a 9 en donde la profundidad máxima real tiene un tope de 32.

- Otros parámetros relevantes

Algunos otros datos que pueden ayudar a la estimación de la complejidad computacional son el número de líneas de código (LDC), número de líneas de comentarios, porcentaje de comentarios (LCP) y el número de funciones de cada clase (NDF).

4.2 MARCO CONCEPTUAL

Para un entendimiento global de la información presentada a lo largo del texto, se exponen algunos conceptos destacados.

- Error

Para una muestra específica x , el error del estimador $\hat{\theta}$ estará dado por

$$e(x) = \hat{\theta}(x) - \theta \quad (87)$$

Es importante resaltar que el error de la estimación no depende solo del estimador sino también de cuán representativa es la muestra elegida para obtener la estimación.

- MSE

El error cuadrático medio de $\hat{\theta}$ es el valor esperado (la esperanza matemática de todas las muestras hechas) de los errores cuadráticos.

$$MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta}(x) - \theta)^2] \quad (88)$$

Este valor indica hasta qué punto en promedio los valores estimados producidos se desplazan entre sí teniendo como referencia a un parámetro único dentro de los valores estimados.

- Desviación de Muestreo

La desviación de muestreo del estimador $\hat{\theta}$ para un valor x está dado por

$$d(x) = \hat{\theta}(x) - E(\hat{\theta}(X)) = \hat{\theta}(x) - E(\hat{\theta}) \quad (89)$$

En donde $E(\hat{\theta}(X))$ es el valor esperado (esperanza matemática) del estimador. Al igual que el error de la estimación, la desviación del muestreo no depende solo del estimador sino también de cuán representativa es la muestra elegida para obtener la estimación.

- Sesgo

Es un valor que representa la distancia entre el promedio de la recolección de valores estimados y un solo parámetro que está siendo estimado. El *Bias* de $\hat{\theta}$ está definido como

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta \quad (90)$$

Se puede destacar que la relación entre el *Bias* y la varianza es análoga a la relación entre la exactitud y la precisión.

- Matriz Hermitiana

La matriz Hermitiana es un tipo de matriz cuadrada que contiene elementos de tipo complejo y posee además la característica de ser igual a su propia traspuesta conjugada. Es decir, el elemento en la i -ésima fila y j -ésima columna es igual al conjugado del elemento en la j -ésima fila e i -ésima columna para los índices i, j .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix} \quad (91)$$

- Matriz Triangular

Es un tipo especial de matriz cuadrada cuyos elementos por encima o por debajo de su diagonal principal son cero.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & . & . & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & . & . & . & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & . & . & . & u_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (92)$$

- Ruido Gaussiano y Ruido Blanco

El ruido Gaussiano es un tipo de ruido estadístico que tiene una función de densidad de probabilidad igual a la de la distribución normal, que también se conoce como la distribución de Gauss. En otras palabras, los valores que el ruido puede asumir son distribuidos de forma Gaussiana y que, generalmente, se encuentra asociado con la radiación electromagnética.

Si un ruido es Gaussiano, la probabilidad que se aleje de más de 3σ del valor promedio es muy bajo. Esta propiedad es utilizada para identificar la señal del ruido, pero sólo funciona si el ruido es realmente Gaussiano. El ruido blanco es una señal aleatoria, caracterizada porque sus valores en instantes de tiempo distintos no tienen relación alguna entre sí, es decir, no existe correlación estadística entre sus valores.

El ruido blanco Gaussiano será aquel cuya función de densidad responde a una distribución normal.

- Matriz Jacobiana

La matriz Jacobiana es aquella que contiene todas las derivadas parciales de primer orden de una función vectorial. Cuando es una matriz cuadrada, su determinante se denomina Jacobiano.

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (93)$$

Como la definición de Matriz Jacobiana y el valor del Jacobiano suele ser confusa, se puede hacer una analogía y pensar en una encuesta en la que se pidió a un grupo de personas calificar un par de diferentes productos en una escala (por ejemplo, de 1 a 5) del peor al mejor. La puntuación global dada a cada producto será el promedio de todas las calificaciones que la gente le dio a ese producto. Para ver cómo una persona influyó en la valoración global para un solo producto, se puede analizar la calificación de esa persona para ese producto específico.

Cada una de esas variaciones de la relación entre persona y producto es como una derivada parcial, y la asignación de una valoración de dicha persona a cada producto es como el valor Jacobiano. Si se reemplaza a las personas con sensores y productos con los estados, se puede comprender de mejor manera la relación entre el modelo de sensor y el modelo de proceso del filtro de Kalman Extendido.

- Determinante

Es una operación matemática realizada en álgebra matricial. El algoritmo de extracción del determinante de una matriz A de tamaño 3x3 prosigue de la forma

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh. \end{aligned} \quad (94)$$

Media o Valor Esperado

El valor esperado, también llamado esperanza matemática, media poblacional o media de una variable aleatoria X , está representado por el valor $E[X]$.

Cuando la variable aleatoria es discreta, la esperanza es igual a la suma de la probabilidad de cada posible suceso aleatorio multiplicado por el valor de dicho suceso. Por lo tanto, representa la cantidad media que se espera obtener como resultado de un experimento aleatorio cuando la probabilidad de cada suceso se mantiene constante y el experimento se repite un elevado número de veces. Cabe decir que el valor que toma la esperanza matemática en algunos casos puede ser uno no esperado, es decir totalmente impredecible, improbable o incluso imposible.

- Covarianza

La covarianza es un valor que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias. Es el dato básico para determinar si existe una dependencia entre ambas variables y además es el dato necesario para estimar otros parámetros básicos, como el coeficiente de correlación lineal o la recta de regresión. Esta expresado por.

$$\sigma(x, y) = E [(x - E[x])(y - E[y])] \quad (95)$$

- Varianza

Valor que mide hasta qué punto un conjunto de números se distribuye alejándose unos de otros. Una variación de cero indica que todos los valores son idénticos. La varianza es siempre un valor positivo, en donde una varianza pequeña indica que los puntos de datos tienden a estar muy cerca de la media (valor esperado) y por lo tanto el uno al otro, mientras que una alta varianza indica que los puntos de datos están muy distribuidos alrededor de la media y entre cada uno.

Una medida equivalente es la raíz cuadrada de la varianza, llamada la desviación estándar. La desviación estándar tiene la misma dimensión que los datos, y por lo tanto es comparable a desviaciones de la media. Como la desviación estándar es a menudo representado con el símbolo σ , la varianza entonces estará representada con el símbolo σ^2 .

$$VAR = E[(X - \mu)^2] \quad (96)$$

- Eficiencia

Dos propiedades deseables en la respuesta de un estimador son la imparcialidad (nulo valor de sesgo) y el nulo -o al menos mínimo- error cuadrático medio (MSE). Los estimadores, lamentablemente y por lo general, no pueden satisfacer de mejor forma las dos condiciones al mismo tiempo: un estimador con sesgo puede tener menor error cuadrático medio (MSE) que cualquier estimador imparcial.

Entre estimadores imparciales, a menudo existe uno con la menor varianza, llamado el estimador insesgado de varianza mínima (MVUE). En algunos casos existe un estimador imparcial eficiente, que, además de tener la menor varianza entre los estimadores sin sesgo, satisface la regla de Cramer-Rao, que es un absoluto límite inferior de la varianza para las estadísticas de una variable.

- RMSE

Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio es una medida de error estadística, correspondiente a la magnitud media del error, y es ampliamente utilizada como parámetro de análisis del error para datos numéricos de propósito general. A comparación del error absoluto medio (MAE) en donde brinda el mismo peso a todos los errores de la señal, el RMSE penaliza severamente a los errores más grandes que se encuentren en los datos, es decir, que más se alejen de la varianza⁷³ ya que los errores se elevan al cuadrado antes de que se promedien en el análisis. Esto significa que el RMSE es más útil cuando grandes errores son particularmente indeseables.

La escala del RMSE puede estar comprendida de 0 a ∞ y sus puntuaciones son de orientación negativa, es decir que los valores más bajos son los más óptimos o los mejores. La ecuación por medio de la cual se calcula el valor del RMSE es la siguiente.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} = \sqrt{MSE(\hat{\theta})} \quad (97)$$

Hay que tener en cuenta que el término RMSE y RMSD es el mismo parámetro estimativo, llamado simplemente de dos modos ya que se entiende a la desviación como una medida de error, adoptando el otro nombre.

⁷³ CHAI, T. y DRAXLER, R.R. Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? – Arguments against avoiding RMSE in the literature. Geosci, 2014. p. 1247-1250.

4.3 ESTADO DEL ARTE

El uso de los Filtros de Kalman es amplio para la eliminación del ruido y errores que en los datos aparecen, pero hay que analizar algunos tipos de filtros de Kalman específicos, en concreto el filtro del Kalman *Unscented* (UKF) y el filtro de Kalman Extendido (EKF) para determinar cuál de ellos presenta las mejores características de atenuación o eliminación del error en señales de origen biomecánico.

Uno de los primeros acercamientos que se tienen en la reducción de errores en los datos de medición usando un filtro de Kalman lo provee Roetenberg, *et al*⁷⁴, en donde la aplicación pretende la eliminación de error por deriva fusionando los datos de sensores como acelerómetros, magnetómetros y giroscopios, además de la aplicación de un filtro de Kalman Complementario, logrando resultados exitosos comprobables mediante la comparación con un sistema óptico de referencia el cual provee mediciones más exactas. La solución de Roetenberg *et al* vislumbra el camino de la corrección de datos usando filtros estimativos, aunque explícitamente no se haya usado un filtro de Kalman por fuera del Complementario.

Julier y Uhlmann⁷⁵ realizaron la primera implementación del filtro de Kalman *Unscented* y según se expone en su trabajo, la principal operación matemática realizada en un filtro de Kalman sin importar su tipo es la determinación de la constante de variación gaussiana por medio de la Transformada *Unscented*. Cuando se habla de un filtro de Kalman Extendido, la distribución de la función de estados es aproximada a la constante de variación gaussiana, por lo cual éste filtro puede introducir grandes errores de estimación al sistema que finalmente degradan el rendimiento del filtro en muchos de los casos debido a la divergencia matemática (deriva) producida. Por otra parte, el filtro de Kalman *Unscented* trata de resolver el problema de la generación de los errores estimativos haciendo una aproximación muestral determinística y finalmente la distribución de estados es realizada por una aproximación de la constante de variación gaussiana, pero haciendo una selección de muestras específicas, lo que se conoce como puntos sigma.

Posteriormente en el trabajo de Khoder y Jida⁷⁶ se implementa una variación del filtro de Kalman *Unscented*, llamado Escalado *Unscented* basado en cuaterniones, el cual es usado para corregir experimentalmente el gran error producido en sistemas de

⁷⁴ ROETENBERG, Daniel, *et al*. Compensation of Magnetic Disturbances Improves Inertial and Magnetic Sensing of Human Body Segment Orientation. IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, Vol. 13, no. 3, 2005.

⁷⁵ JULIER, Simon J y UHLMANN, Jeffrey K. New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems. Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition VI, 1997.

⁷⁶ KHODER, Wassim y JIDA, Bassem. A Quaternion Scaled Unscented Kalman Estimator for Inertial Navigation States Determination Using INS/GPS/Magnetometer Fusion. Journal of Sensor Technology, 2014. p. 101-117.

navegación fusionados como GPS/INS obteniendo resultados satisfactorios, pero sin conclusiones de fondo acerca del tema. La incorporación de un filtro de Kalman en el sistema de posicionamiento ayuda principalmente a la corrección de la altitud, ya que los errores producidos por contaminación de la señal debido a mediciones erróneas provienen principalmente de los sensores de posición y no es posible tratar eficazmente el problema usando el filtro propuesto.

En el trabajo desarrollado por Takeda *et al*⁷⁷, se propone un método para reducir la deriva en señales biomecánicas usando sensores de medición inercial basado en la aplicación de un filtro Digital Butterworth de cuarto orden, seguido de la sustracción de los valores estáticos del giróscopo a la señal medida y finalmente la aplicación de una doble derivativa e integral para poder remover del todo la señal de deriva en los datos recolectados. Se considera como un trabajo relevante en cuanto a la eliminación de la deriva de los sensores usados en tal aplicación, pero no hace referencia al uso alguno de los filtros de Kalman para tratar el problema desde la perspectiva deseada.

En cuanto a la comparación específica de los Filtros de Kalman *Unscented* y Extendido, se seleccionaron los artículos que proveen información relevante acerca del comportamiento de dichos filtros en diferentes escenarios y aplicaciones. El único trabajo entre los seleccionados que utiliza la comparación de filtros EKF y UKF con aplicaciones biomecánicas es propuesto por LaViola⁷⁸, en donde se hizo un análisis por comparación del error entre la información devuelta por el filtro para seguimiento del movimiento de la cabeza y la mano con propósitos de aplicación en realidad virtual. Sus resultados más fehacientes resaltan el hecho de que si bien ambos filtros poseen un nivel de rendimiento equivalente y óptimo, el uso del filtro de Kalman Extendido es propuesto como el mejor debido a su menor costo computacional, y por ende posee mayor rapidez.

Hay evidentes ventajas y desventajas en cada uno de los filtros, como por ejemplo se destaca que el UKF puede predecir el estado estimado y el error de covarianza hasta una exactitud de cuarto orden, mientras que el EKF solo predice hasta el segundo. Por otro lado, como la estimación de cuarto orden del UKF consume considerablemente más recursos, no se ve un aporte sustancial al mejoramiento de los datos ingresados.

En cuanto a la comparación del EKF versus UKF para objetos en movimiento, en la publicación de D'Alfonso, *et al*⁷⁹ se realizó un análisis de estos dos filtros para la

⁷⁷ TAKEDA, Ryo, *et al*. Drift Removal for Improving the Accuracy of Gait Parameters Using Wearable Sensor Systems. Sensors, 2014.

⁷⁸ LAVIOLA, Joseph. A Comparison of Unscented and Extended Kalman Filtering for Estimating Quaternion Motion. Brown University Technology Center for Advanced Scientific Computing and Visualization, 2015.

⁷⁹ D'ALFONSO, Luigi, *et al*. Mobile robot localization via EKF and UKF: A comparison based on real data. Robotics and Autonomous Systems, 2015. p. 122-127.

fusión de datos de los sensores ultrasónicos de un robot. Los estudios concluyeron que el filtro de Kalman Extendido es tan eficiente como la versión *Unscented* para la locomoción del robot basado en los datos reales tomados experimentalmente. El autor se inclina por la utilización del filtro de Kalman *Unscented* más que por su competidor debido a que las propiedades de aproximación a los valores reales son mucho mejores. Un estudio en robótica similar realizado por Kurt-Yavuz⁸⁰ demuestra que un filtro basado en UKF funciona mejor en sistemas de rastreo de movimiento, lo cual es reproducido en otro estudio de características similares⁸¹. Por su parte, Toloey y Niazi⁸² deja en evidencia que, bajo análisis de datos reales, el filtro de Kalman *Unscented* funciona mejor que su competidor debido a una mejor aproximación numérica y estabilidad en el tiempo, características ideales para ser usado en sistemas de rastreo de movimiento dedicados.

En el ámbito de la aeronavegabilidad donde se realiza la comparación de EKF versus UKF, tres estudios son concluyentes y demuestran que el filtro de Kalman *Unscented* tiene un mejor rendimiento: Giannitrapani⁸³, *et al*, hace hincapié en que, si bien el resultado de los dos estimadores es satisfactorio, el UKF muestra un mejor resultado en términos de la localización promedio del error y la consistencia de los estados estimados. En el estudio de Allota, *et al*⁸⁴ se usa la comparación de ambos filtros en un vehículo acuático no tripulado y se expone que ambos filtros han demostrado un buen rendimiento, más sin embargo el UKF se lleva todo mérito por su superioridad y facilidad de implementación ya que no requiere de complicados cálculos, algo que si puede ocurrir en el EKF con el uso de Jacobianos. En conclusión, el estudio de St-Pierre y Gingras⁸⁵ muestra que, si bien el costo computacional del UKF es mayor, “[...] el filtro de Kalman *Unscented* tiene un ligero mejor rendimiento que el filtro de

⁸⁰ KURT-YAVUZ, Zeyneb y YAVUZ, Sirma. A Comparison of EKF, UKF, FastSLAM2.0, and UKF-based FastSLAM Algorithms, Computer Engineering Department, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey, 2012.

⁸¹ WEN, Qingzhen, *et al*. Comparison of Filtering Techniques for Simultaneous Localization and Tracking. International Conference on Estimation, Detection and Information Fusion, ICEDIF, 2015. p. 387-392.

⁸² TOLOEI, A. y NIAZI, S. Estimation of LOS Rates for Target Tracking Problems using EKF and UKF Algorithms- A Comparative Study. International Journal of Engineering Transactions, 2015. p. 172-178.

⁸³ GIANNITRAPANI, Antonio, *et al*. Comparison of EKF and UKF for Spacecraft Localization via Angle Measurements. Ieee Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011. p. 75-84.

⁸⁴ ALLOTA, Benedetto, *et al*. A comparison between EKF-based and UKF-based navigation algorithms for AUVs localization. ISME - Interuniversity Center of Integrated Systems for the Marine Environment, 2015.

⁸⁵ ST-PIERRE, Mathieu y GINGRAS, Denis. Comparison between the unscented Kalman filter and the extended Kalman Filter for the position estimation module of an integrated navigation information System. Intelligent Vehicles Symposium, 2004.

Kalman Extendido cuando se utiliza como un método de fusión en un módulo de posicionamiento de un sistema de información integrado de navegación.”

Con base en lo presentado anteriormente se puede concluir que no se dispone de un volumen de información considerable acerca de otros trabajos que hayan empleado un filtro de Kalman *Unscented* y un filtro de Kalman Extendido para lograr una eliminación de los errores presentes en los datos capturados en una aplicación biomecánica o biomédica, evidenciando la clara necesidad de realizar la investigación en esta aplicación específica. Además de los trabajos encontrados, si bien tratan el tema de la corrección de errores de medición y la comparación directa de ambos filtros caso de estudio, no se hace énfasis en el filtro de Kalman como una solución definitiva de problemas en la deriva o distorsión de la información por perturbaciones de diferente naturaleza. En cuanto al rendimiento de los filtros EKF y UKF en específico, la mayoría de resultados sin discernir su aplicación apuntan a que el UKF es más óptimo que su contraparte, pero cabe resaltar que para el único estudio en donde los filtros son usados en una aplicación biomecánica, el EKF mostró un mejor resultado.

5. DISEÑO METODOLÓGICO

A continuación, se expondrá el diseño de los pasos necesarios para lograr el cumplimiento del objetivo propuesto para la investigación, siguiendo un orden de ideas claro y adecuado que facilite la comprensión de este trabajo.

5.1 MÉTODO

El desarrollo de la investigación estará dado en cuatro etapas, cada una de ellas abarca un tema de interés específico y riguroso para poder cumplir con los objetivos específicos planteados en la propuesta.

5.1.1 Identificación de los algoritmos para la estimación no lineal de posición y orientación de objetos en movimiento.

Antes de realizar un trabajo investigativo, es necesario determinar los algoritmos de estimación no lineal en aplicaciones de posición y orientación de objetos en movimiento, ya que proveen el fundamento de las técnicas de estimación y el desarrollo de técnicas específicas de filtrado.

Actividades

- Consulta y documentación de información que abarque la temática de estimadores y estimadores no lineales.
- Consulta y documentación de información de apoyo, como los términos propios de estadística y cálculo.

Resultado

- Generación de un compendio de información que muestra el trasfondo de los estimadores no lineales, establecidos en el marco referencial.

5.1.2 Determinación de las características propias de los filtros de Kalman.

Es necesario establecer las características básicas de los filtros para su implementación en los sistemas elegidos; las actividades y el resultado esperado se presentan a continuación.

Actividades

- Consulta y documentación de información que abarque la temática de filtros de Kalman.

- Profundización en la temática concerniente a los filtros de Kalman *Unscented* y Extendido.
- Análisis de las características propias de los filtros de Kalman *Unscented* y Extendido.
- Recopilación de información acerca de implementaciones de Filtros de Kalman realizadas para otros sistemas o dispositivos.

Resultado

- Caracterización y documentación de cada uno de los filtros caso de estudio reflejado en el marco referencial de la investigación.

5.1.3 Implementación de un escenario basado en pluralidad de sensores de movimiento.

La creación de un escenario basado en pluralidad de sensores reúne los elementos de tipo electrónico y en sistemas de información necesarios para capturar la información que será objeto de análisis posterior.

Actividades

- Documentación de las características de los sensores de movimiento, incluyendo diversas tecnologías.
- Documentación de las características necesarias de procesamiento para la creación del escenario, escogiendo la alternativa más viable.
- Evaluación de las características de la MPU Invensense MPU-9150.
- Interconexión de las MPU para la recolección de datos
- Verificación del funcionamiento del sistema con pluralidad de sensores

Resultado

- Creación de una plataforma de captura de movimiento basado en pluralidad de sensores.

5.1.4 Implementación de los filtros y preparación del entorno.

Mediante la aplicación del conocimiento específico de la Ingeniería Electrónica en Procesamiento de Señales se hace la elaboración e implementación de los filtros de acuerdo a las características específicas de cada uno, proponiendo adicionalmente un sistema de referencia basado en una pluralidad de sensores y otro de referencia. Las actividades y el resultado esperado se presentan a continuación.

Actividades

- Análisis de algoritmos de Filtro de Kalman implementados digitalmente.
- Implementación de los filtros de Kalman en un lenguaje acorde al escenario basado en la pluralidad de sensores
- Verificación del funcionamiento preliminar de los filtros de Kalman.

Resultados

- Implementación algorítmica de los Filtros de Kalman adecuado, coherente y funcional con el sistema de captura de movimiento basado en pluralidad de sensores.

5.1.5 Implementación de un escenario de referencia.

La creación de un escenario de referencia brinda la posibilidad de crear simulaciones que reflejen algunos comportamientos característicos de las señales a estudiar y sustentan los análisis desarrollados a partir de los datos generados por medio de este.

Actividades

- Recopilación de información acerca de los movimientos de flexión y extensión en los miembros superiores del cuerpo humano y sus características básicas.
- Documentación de las características de diversos servomotores para proporcionar el movimiento.
- Determinación de los materiales necesarios para la construcción del escenario.
- Verificación del funcionamiento del sistema de referencia.

Resultado

- Construcción de un escenario de referencia que permita realizar la comparación de los filtros frente al sistema basado en la pluralidad de sensores.

5.1.6 Análisis de los datos a través de la raíz cuadrada del error cuadrático medio.

Los datos generados a partir de los protocolos de pruebas deberán ser procesados para determinar la eficiencia de cada filtro aplicado, por lo cual se adoptará la medición del RMSE como parámetro indicador de eficiencia. Las actividades y el resultado esperado se presentan a continuación.

Actividad

- Selección de las técnicas de correlación apropiadas para el análisis de los datos obtenidos.
- Analizar cada muestra de datos recolectada por medio del escenario basado en pluralidad de sensores para determinar el RMSE versus el escenario de referencia propuesto.

Resultado

- Conclusión acerca de la efectividad de los filtros de Kalman implementados en el sistema de captura de datos.

5.1.7 Análisis de la complejidad computacional de los filtros.

Se analizan los algoritmos con base a las estructuras de programación para determinar el valor de complejidad computacional.

Actividades

- Documentación y recopilación acerca de las técnicas de análisis de algoritmos computacionales.
- Utilización de un Software para el análisis del código fuente en C++
- Análisis de resultados derivados del código fuente.

Resultado

- Determinación de la complejidad computacional promedio para el EKF y el UKF.

5.1.8 Recopilación y presentación de resultados.

Se verifica que la investigación progrese con la satisfacción de los objetivos establecidos. Una vez la experimentación y el cumplimiento de los objetivos sea documentado, se expondrá la compilación de todos los resultados y conclusiones finales de la investigación. Las actividades y el resultado esperado se presentan a continuación.

Actividades

- Organización, documentación y presentación de resultados.

Resultados

- Consolidación del documento final que evidencia el origen, objeto y certeza de la investigación realizada.

5.2 CRITERIOS DE VALIDEZ Y CONFIABILIDAD

Para analizar el rendimiento de los filtros en las pruebas definidas, es necesario tener una medida estándar del error producido. El valor de RMSE será un indicador de validez experimental ya que permitirá evaluar el rendimiento del filtro a partir de la comparación directa con las señales de origen sin procesar. La repetitividad de los resultados permitirá comprobar que el comportamiento de los filtros es estable conservando las características básicas del escenario de prueba, sin importar el momento o lugar de la captura de la señal, lo que provee una sólida prueba de la veracidad de la información. Adicionalmente, la confiabilidad estará dada en la medida de la exigencia de una respuesta óptima de los filtros en escenarios o situaciones de comprobación en donde se exageran o acentúan experimentalmente los problemas para crear entornos que en la cotidianidad no sucederá. Llevar las pruebas a un límite para el peor caso posible supone una estabilidad del filtro necesaria para afrontar cualquier situación desfavorable.

5.3 VARIABLES E INDICADORES

Se debe tener en consideración todas aquellas variables que influyen en el desarrollo metodológico y en los resultados de las pruebas, así como los indicadores que resaltan la evidencia concluyente sobre el análisis de los datos recolectados. Se presenta a continuación las variables e indicadores que hacen parte de esta investigación.

- Velocidad angular del movimiento

Rapidez con la cual el brazo realiza los movimientos determinados en el protocolo de procedimientos. Su unidad de medida está dada en radianes por segundo [rad/s].

- Frecuencia de Muestreo

Tasa a la cual son capturados los datos provenientes de los sensores. Su unidad de medida está dada en Hertz [Hz].

- Tiempo de captura

Duración temporal de la señal capturada. Su unidad de medida está dada en Segundos [s].

- Tipo de movimiento

Forma de onda descrita que se ajusta a los datos de tipo biomecánico que se generan en el proceso de captura.

- Amplitud de los movimientos

Valores límite de Flexión y Extensión en los que está dado el movimiento. Se usa como medida de valores pico (máximos y mínimos). Su unidad de medida está dada en Grados Sexagesimales [°].

- *Offset*

Valor de desplazamiento constante de la forma de onda con respecto del cero de la señal. Está medido en las mismas unidades de la amplitud de los movimientos. En una forma de onda Senoidal, un valor *offset* de cero indica que los valores máximos y mínimos de la señal estará dado por el valor de la amplitud de la onda.

- Valores específicos de los parámetros del filtro

Son aquellos parámetros que permiten la inicialización del filtro, como son los valores de desviación estándar en la medida (r) y la desviación estándar en el proceso (q). Otros parámetros como son la ganancia del filtro de Kalman, las matrices de varianza y covarianza, entre otros, son calculados de forma automática por el filtro. ... Véase Sección 4.1.5. Filtro de Kalman...

- RMSE

Indicador de la cantidad de error presente en las señales recolectadas, teniendo como referencia una señal de entrada del sistema o una señal confiable recolectada junto a los datos. Para la definición matemática del RMSE, ...véase la Sección 4.2. Marco conceptual...

5.4 PROTOCOLOS DE PRUEBA

La experimentación por medio de la cual se obtienen los datos de prueba debe estar guiada por un diseño lógico que evidencie la correcta aplicación de los filtros, teniendo en cuenta las variables e indicadores propuestas en el diseño metodológico. En el desarrollo de los protocolos de prueba, se usarán movimientos de tipo senoidal, ya que reflejan el movimiento de flexión y extensión realizado en las extremidades superiores generado por la articulación del codo, las velocidades angulares del movimiento estarán comprendidas entre 1 y 15 rad/s, teniendo en cuenta que dentro de ese rango se producen los movimientos del cuerpo humano, y finalmente se adopta una amplitud de 20° , un valor que puede ser cambiado en cualquier momento, ya que para la articulación del codo los rangos de abertura entre el antebrazo y el brazo van desde los 0° hasta aproximadamente los 165° en total.

5.4.1 Protocolo 1. Variación de los parámetros de desviación estándar

Se realizan cinco tomas de movimiento para cada velocidad angular de 1, 5, 10 y 15 rad/s, representando la característica de flexión y extensión, de amplitud $A=20^\circ$, $Offset=0^\circ$, frecuencia de muestreo $F_s=35$ Hz, forma de onda senoidal y tiempo de captura $T_c=20$ s. En cada toma se realiza la variación de los parámetros de desviación estándar en la medida (r) y desviación estándar en el proceso (q) para EKF y UKF con el fin de establecer los valores de r y q que sintonizan de manera óptima los filtros para las velocidades angulares específicas.

5.4.2 Protocolo 2. Determinación de la desviación estándar promediada

A partir de los valores óptimos de ambos filtros de Kalman para cada velocidad angular específica propuesta en el protocolo 1, se halla un valor de desviación estándar promediada para la medida (\bar{x}_r) y desviación estándar promediada para el proceso (\bar{x}_q) que permita la utilización de los filtros UKF y EKF para un movimiento en el cual la velocidad angular varíe en el rango de 0 a 15 rad/s.

5.4.3 Protocolo 3. Verificación de la eficiencia de los valores de desviación estándar promediada

Se realiza una toma de movimiento para cada velocidad angular de 1, 5, 10 y 15 rad/s en dos escenarios diferentes:

Escenario 1: se escogen los parámetros de desviación estándar en la medida (r) y desviación estándar en el proceso (q) óptimos para cada valor específico de velocidad angular hallados en el protocolo 1 para EKF y UKF.

Escenario 2: se escogen los parámetros de desviación estándar promediados para la medida (\bar{x}_r) y desviación estándar promediados para el proceso (\bar{x}_q).

Las características que comparten ambos escenarios son los siguientes:

Movimiento de flexión y extensión simulado, de amplitud $A=20^\circ$, *offset* $=0^\circ$, frecuencia de muestreo $F_s=35$ Hz, forma de onda senoidal y tiempo de captura $T_c=30$ s.

El propósito de este protocolo es comprobar si los valores de desviación estándar promediados para la medida (\bar{x}_r) y desviación estándar promediados para el proceso (\bar{x}_q) obtenidos en el protocolo 2 son óptimos para cualquier velocidad angular en el rango propuesto.

5.4.4 Protocolo 4. Obtención de los datos en periodos de tiempo específicos

Se realiza una toma de movimiento para cada tiempo de captura T_c de 10, 60, 600 y 3600 segundos, simulando un movimiento de flexión y extensión, con una amplitud $A=20^\circ$, *Offset* $=0^\circ$, frecuencia de muestreo $F_s=35$ Hz, forma de onda senoidal. Lo anterior se realiza en velocidades angulares de 1 y 15 rad/s.

El propósito de este protocolo es mostrar el valor del RMSE para cada filtro cuando se exponen a diferentes tiempos de uso.

6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Por medio del desarrollo del Marco Referencial en el cual se soporta este trabajo y que da cumplimiento a los dos primeros objetivos específicos planteados, se han cubierto las teorías, técnicas y conocimientos necesarios para lograr la identificación de los algoritmos para la estimación no lineal de posición y orientación de objetos en movimiento, partiendo de los estimadores estadísticos y arrojando como resultado que la elección del filtro de Kalman *Unscented* y filtro de Kalman Extendido como caso de estudio es apropiado debido a las características de eliminación o atenuación de error en las señales que ambos ofrecen, sumado a sus usos evidenciados en diferentes sistemas de recolección de datos y aplicación de la información en numerosos entornos. Adicionalmente, se detalló las características propias de cada filtro de Kalman, así como la descripción algorítmica y funcional de estos, sentando las bases para lograr la implementación en un sistema de captura y procesamiento de la información, el cual se describe a continuación.

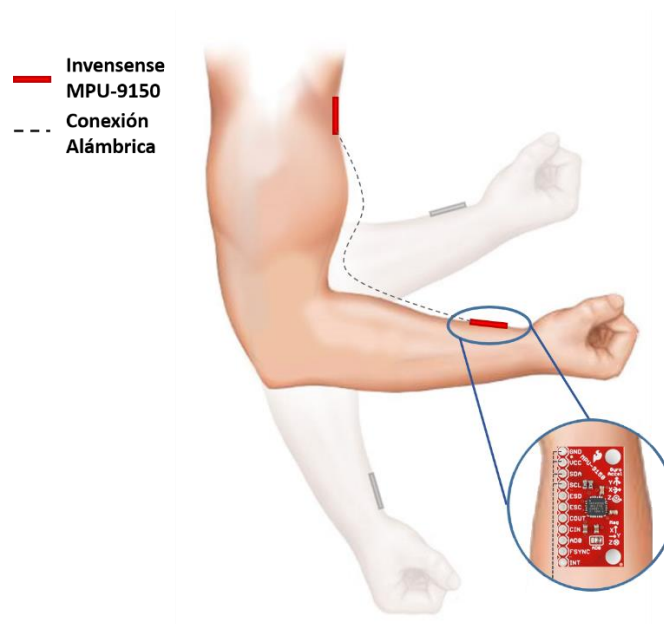
6.1 ESCENARIO BASADO EN UNA PLURALIDAD DE SENSORES.

Para realizar una captura de datos de origen biomecánico o biomédico, se requiere del uso de una gama de sensores especiales capaces de detectar la variable deseada. Para el caso del movimiento en las extremidades superiores del cuerpo humano, se requiere el uso de las Unidades de Procesamiento de Movimiento para recolectar las muestras con las cuales se pondrán a prueba los filtros. A continuación, se describe el escenario correspondiente a la instrumentación electrónica que permite la recolección de datos llevada a cabo en esta investigación.

6.1.1 Descripción del sistema basado en pluralidad de sensores.

El objetivo es capturar las señales biomecánicas de los miembros superiores del cuerpo humano, y para lograrlo es necesario obtener los datos que proporcionan dos Unidades de Procesamiento de Movimiento, ubicadas respectivamente en el antebrazo y en el brazo.

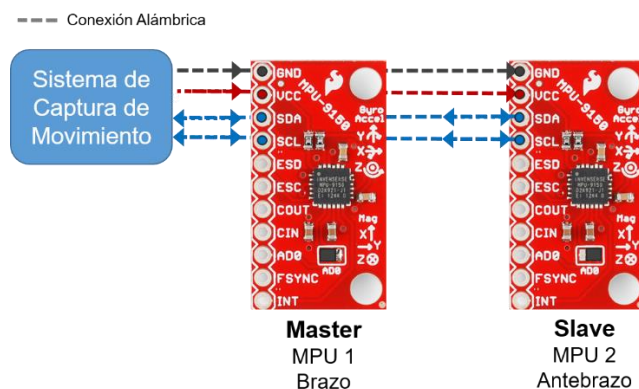
Figura 18. Distribución de las MPU ubicadas en las extremidades superiores.



Fuente: Autor. Imagen original de physictips.com. Figure 5.1 An elbow flexion and extension exercise. Disponible en: <<http://physictips.com/wp-content/uploads/2016/01/Elbow-Flexion-and-Extension.jpg>>

La manera en cómo las dos unidades están conectadas entre sí para poder obtener las señales, depende de la arquitectura que se maneje y del protocolo de comunicación, para esta investigación se usa la configuración descrita en la figura 19.

Figura 19. Interconexión de las MPU.



Fuente: Autor

Como se trata de una comunicación digital por protocolo I²C, la interconexión de las dos MPU puede realizarse de forma serial, de modo que tanto la alimentación eléctrica como los datos sean transmitidos de esta forma. La selección de la unidad a utilizar se da por medio de la dirección asociada a cada MPU, y estará determinada por un *jumper* AD0 en la parte frontal de la MPU. Se emplea la dirección que provee Invensense por defecto, siendo 0x68 para la unidad *Master* y 0x69 para la unidad *Slave*. En la figura 19 puede notarse la configuración de la posición en este *jumper*.

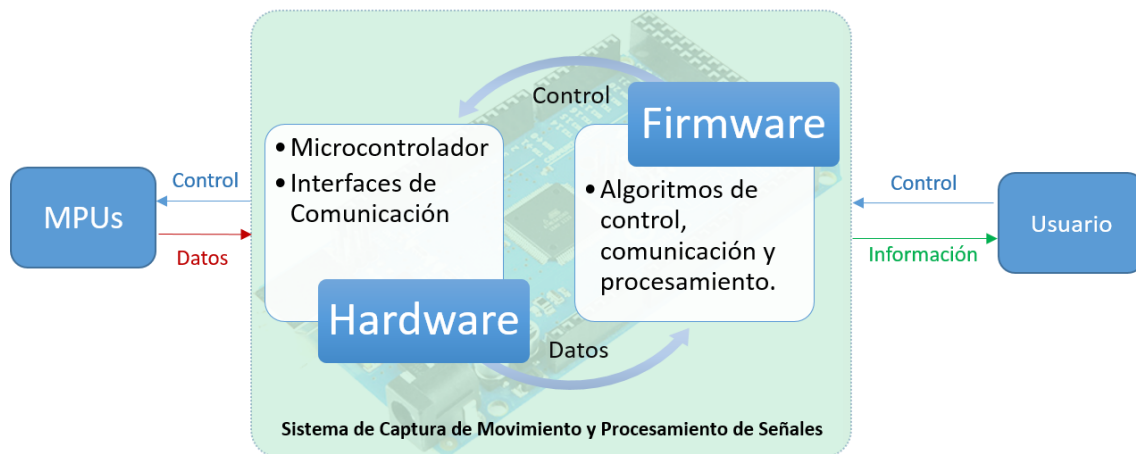
6.1.2 Descripción del sistema de captura de movimiento y procesamiento de señales.

El sistema de captura de movimiento y procesamiento de señales es un dispositivo que se responsabiliza, entre otras cosas, de suministrar la energía eléctrica, enviar las instrucciones a las MPU, requerir los datos de las mismas en forma de señales digitales, capturar los datos, realizar operaciones con las señales tales como la fusión de datos, transformación de cuaterniones a ángulos de Euler, ejecutar el procesamiento de los filtros de Kalman y entregar una respuesta en forma conveniente y eficaz, en este caso en forma de valores numéricos enviados a través de un puerto USB usando un protocolo de transmisión serial bidireccional. Se compone principalmente de dos elementos:

- Hardware Embebido, el cual consta de un microcontrolador, interfaces de comunicación, regulación de energía eléctrica, etc. Para el desarrollo de un sistema funcional rápido, se ha optado por una placa de desarrollo Arduino Mega 2560 con miras a la implementación de un dispositivo embebido propio.
- Firmware, código presente en el hardware embebido que realiza las funciones descritas anteriormente. Para este caso, el código fuente del firmware está escrito en lenguaje C++, y se ensambla con el uso del compilador AVR GCC para microcontroladores Atmel.

En el sistema de captura se hace la toma de datos en tiempo real con procesamiento en tiempo real, proporcionando una salida sincronizada. La frecuencia máxima de muestreo es 45 Hz.

Figura 20. Sistema de captura de movimiento y procesamiento de señales



Fuente: Autor

Siguiendo una secuencia de pasos ordenada, el sistema de captura recibe órdenes del usuario quien especifica qué funcionamiento debe tomar, el Firmware del sistema procesa la orden y por medio del hardware embebido envía la señal de control específica a las MPU que devuelve los datos necesarios, estos se capturan a través del hardware embebido y se realiza su debido procesamiento, como la aplicación de los filtros, convirtiendo los datos en la información del movimiento. Una vez terminado el procesamiento, el sistema envía al usuario la información recolectada y procesada.

6.1.3 Descripción de la implementación de los algoritmos del filtro de Kalman.

La implementación de los algoritmos de filtro de Kalman, así como la fusión de datos, se realiza en lenguaje C++ para facilitar el proceso de programación. Tanto el algoritmo del EKF como del UKF están basados en la implementación para MATLAB realizada por Cao^{86,87}, así como su adecuación para la implementación en tiempo real sobre el sistema de captura de movimiento usado en esta investigación.

Se puede consultar el código fuente de la implementación de los filtros en la sección anexos del presente documento.

⁸⁶ CAO, Yi. *Learning the Unscented Kalman Filter*. Mathworks File Exchange, 2008. Disponible en: <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18217-learning-the-unscented-kalman-filter>>

⁸⁷ CAO, Yi. *Learning the Extended Kalman Filter*. Mathworks File Exchange, 2008. Disponible en: <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18189-learning-the-extended-kalman-filter>>

6.2 ESCENARIO DE REFERENCIA PARA LA COMPARACIÓN DE LOS FILTROS.

Así como es necesario recolectar los datos biomecánicos con un sistema de captura adecuado, es fundamental construir una plataforma experimental que permita comprobar la eficiencia del uso de las MPU y generar datos simulando los movimientos básicos de flexión y extensión de las extremidades superiores del cuerpo humano, sin dejar de lado la rigurosidad que debe presentar debido a que los datos provenientes de ésta plataforma servirán como realimentación y punto de referencia para el análisis de datos subsecuente. A continuación, se describe el escenario de referencia que provee la simulación.

6.2.1 Descripción de la plataforma para la experimentación.

La plataforma de experimentación está pensada para simular de forma básica los movimientos de flexión y extensión.

La estructura de la plataforma consta de tres partes.

- **Cabezal**

Elemento móvil que en su superficie puede alojar a una MPU-9150 y permite realizar el movimiento simulando la flexión o extensión, que representaría el segmento del antebrazo.

- **Cuerpo**

Brinda soporte a las piezas móviles y además sirve como eje de apoyo a la MPU, representando el segmento del brazo.

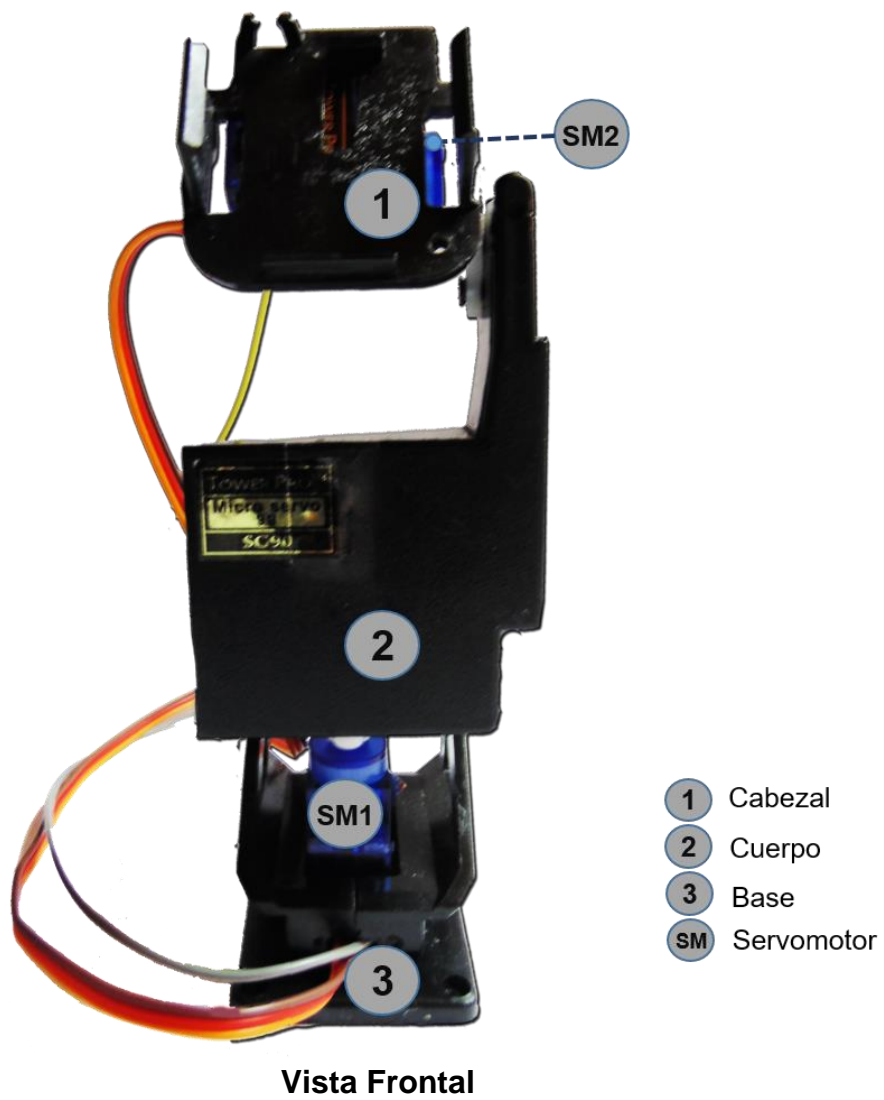
- **Base**

Soporta todo el sistema sobre una superficie de apoyo.

Está construido con material plástico que permite el correcto soporte de la MPU sin interferir en sus características eléctricas y además minimiza las vibraciones producidas por elementos externos al tener anclajes atornillados a la superficie de apoyo.

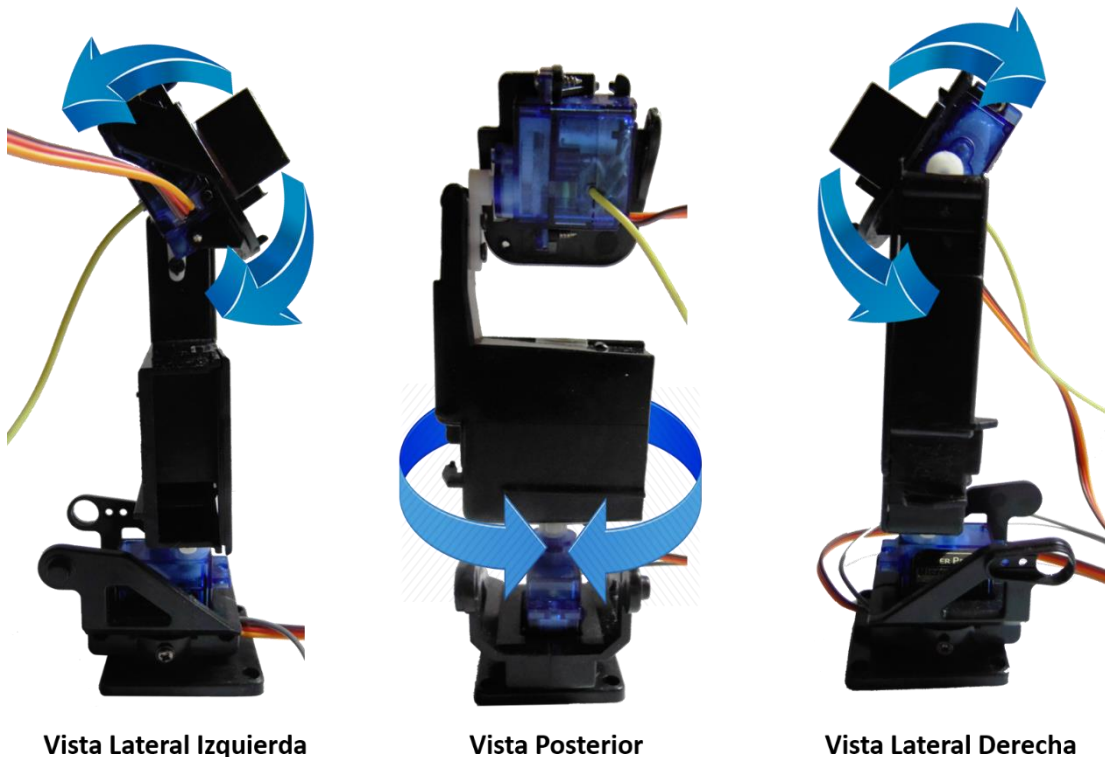
Esta plataforma está gobernada por el Toolbox Arduino en MATLAB SIMULINK y un sistema Arduino Mega 2560 independiente del sistema de captura, lo cual permite manipular con seguridad la plataforma de experimentación sin interferir con el sistema de captura de movimiento.

Figura 21. Plataforma para la experimentación y simulación del movimiento de flexión y extensión.



Fuente: Autor

Figura 22. Diferentes vistas de la plataforma y sus movimientos.



Fuente: Autor

Los movimientos tenidos en cuenta para la toma de datos son los generados por el cabezal, entendiendo que el movimiento hacia arriba representa una flexión y hacia abajo una extensión. Los demás movimientos no se tienen en cuenta para este caso.

Los servomotores que hacen el esfuerzo mecánico para mover la plataforma son TowerPro SG-90, cada uno posee la libertad de movimiento en una sola dirección de 180° en total, 90° hacia cada lado, cuenta con modulación de tipo analógica para la selección del ángulo deseado, piñonera plástica y conectores estándar. Sus características más relevantes se presentan en la tabla 2.

Tabla 2. Resumen de especificaciones del servomotor TowerPro SG-90.

Voltaje de Operación [v]	Torque [kgf/cm]	Velocidad [s/°]	Peso [g]	Ancho de Pulso [μs]	Banda Muerta [μs]
4.8	1.80	0.002	9	500 ~ 2400	10

Fuente: Hoja de especificaciones servomotor TowerPro SG-90. Disponible en: <<http://www.micropik.com/PDF/SG90Servo.pdf>>

Ya que los servomotores proveen una buena velocidad de desplazamiento, es posible simular barridos completos de 180° hasta 9 rad/s y de 90° hasta 17 rad/s, superando la velocidad de cualquier aplicación biomecánica promedio.

6.2.2 Descripción del proceso de análisis de los datos en MATLAB.

La rigurosidad en el análisis de los datos provenientes del sistema de captura determina el éxito de la investigación, por esta razón se ha realizado un programa en MATLAB que elabora el análisis de la información que se suministra como entrada de datos. Este programa de análisis de datos no altera la información capturada, ya que, si los datos son alterados de alguna manera, los análisis resultarían inválidos para el desarrollo de esta investigación. Se analizarán las características más relevantes del programa de análisis, el código fuente se encuentra en la sección de anexos.

- Datos de Entrada.

El programa en MATLAB lee los datos en formato de texto plano, donde los valores están separados por comas y cada salto de línea representa una nueva muestra capturada. El tipo de dato leído es numérico en unidades angulares, en este caso grados $[\circ]$. Los valores separados por comas deben estar en orden específico: *RAW*, *UKF*, *EKF*; en donde *RAW* traduce “en bruto” y es un valor leído directamente de la MPU sin procesamiento salvo la fusión de sensores que forman los ángulos, *UKF* es el dato *RAW* filtrado con el algoritmo del filtro de Kalman *Unscented* y *EKF* es el dato *RAW* filtrado con el algoritmo del filtro de Kalman Extendido. Como los archivos de texto que contienen los datos suelen ser grandes, el programa lee el archivo en bruto y genera vectores para cada columna de datos, los cuales reciben el nombre interno de *RAWData*, *UKFData* y *EKFData*, respectivamente.

- Gráficos

Este programa tiene la capacidad de realizar dos tablas principales de gráficos. La primera tabla contiene tres gráficos que permite una visualización directa de los datos por cada vector generado, más otro que muestra todas las señales en el mismo plano y es útil para ver la forma de onda proveniente de la captura de datos (ej. Figura 32). La segunda tabla, cada gráfico muestra la señal del vector correspondiente superpuesto con la señal de referencia del sistema (ej. Figura 25), lo cual permite tener una visión del comportamiento de las señales en comparación con la señal de referencia, evidenciando de forma gráfica la existencia de sobrepicos, corrimientos de fase, desfases, entre otros.

Los ejes de los gráficos en cualquier tabla se encuentran enlazados entre sí, esto permite aplicar herramientas como acercamiento, alejamiento y desplazamiento simultáneamente en todas las vistas sin esfuerzo adicional.

- Selección de Muestras

Al cargar un archivo de datos, el programa analiza automáticamente el número de muestras ideal que se tendrán en cuenta para el análisis de RMSE. Muchas veces los datos se producen después de un estado de reposo, para lo cual el programa realiza un escaneo rápido de las muestras tomadas y determina un intervalo óptimo de análisis. El número de muestras que se tienen en cuenta para el análisis de RMSE está dado en la variable *ChoppedSamples*, mientras que los vectores que serán analizados posteriormente se guardan como *ChoppedRAW*, *ChoppedUKF* y *ChoppedEKF*. El programa dará prevalencia al inicio y final de la señal más cercano al punto cero de referencia, conservando el mayor número de muestras posibles.

- Correlación Cruzada de Muestras

Una vez se ha determinado el intervalo óptimo de muestras para realizar el análisis de la cantidad de error, el programa automáticamente detecta desfases e imprecisiones en frecuencia de las señales de entrada y los informa, ajustando automáticamente la señal de comparación o referencia para responder más acertadamente a las imprecisiones. Este paso se realiza para obtener un RMSE más justo en las mediciones. Las señales originales a ser analizadas no se alteran de ninguna manera.

- Cálculo automático de parámetros para señales biomecánicas

Cuando se analizan señales biomecánicas reales, algunos parámetros son desconocidos si no se posee un sistema de referencia con el cual contrastar las señales capturadas. Los parámetros que puede estimar son la amplitud de los movimientos, el desfase de la señal con respecto al cero absoluto, el valor de flexión y extensión máximas y la velocidad del movimiento.

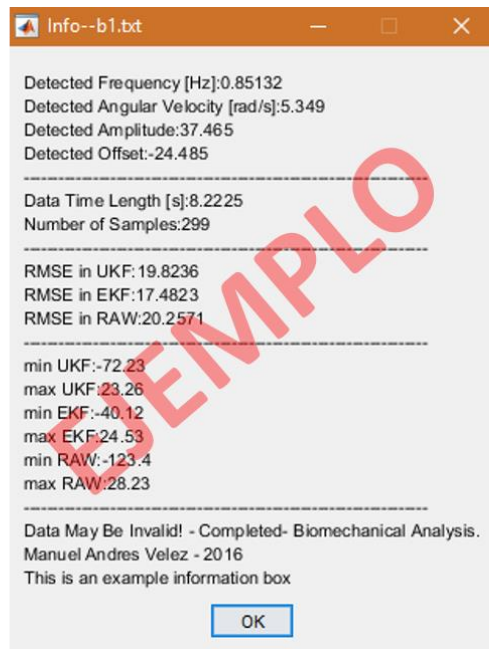
- Cálculo del RMSE.

El programa realiza el cálculo del RMSE con base a lo planteado en el marco referencial (ecuación 97). Si el valor de RMSE es demasiado grande para una señal, se intentará evaluar el RMSE teniendo en cuenta un mejor ajuste de la señal de referencia. Si no es posible dar un RMSE acorde a los datos de entrada, bien sea porque la señal capturada es inválida o porque la señal de referencia es inválida, automáticamente muestra una alerta avisando que los datos no pueden ser procesados en su totalidad y muestra el RMSE obtenido de las señales.

- Datos de Salida

Aparte del valor de RMSE para las señales versus la referencia, el programa muestra un resumen de todas las características descritas anteriormente. En la figura 23 se muestra un ejemplo de la información de resumen que el programa brinda.

Figura 23. Ejemplo de la información de resumen que el programa de análisis brinda.



Fuente: Autor

6.3 ANÁLISIS DE LOS DATOS SIMULADOS.

Para dar cumplimiento al sexto objetivo específico, se realiza el análisis de los datos recolectados por medio de los diversos protocolos de prueba establecidos para obtener una información concisa, presentándose además los resultados obtenidos por cada prueba que permite establecer las conclusiones de la investigación en cuanto a la comparación de los filtros de Kalman *Unscented* y Extendido.

6.3.1 Resultados de la toma de datos establecida en el protocolo 1.

Se realizó la captura de datos en cinco tomas, cada una de ellas a velocidades angulares específicas, siendo estas 1, 5, 10 y 15 rad/s usando diversos valores de desviación estándar en la medida (r) y en el proceso (q) para determinar el comportamiento más adecuado para el UKF y el EKF en cada velocidad. El rango de valores para los parámetros r y q se estableció mediante análisis del comportamiento

del sistema y de los MPU. Se obtuvieron los siguientes resultados en las tomas de datos para este protocolo.

Tabla 3. RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 1 rad/s.

Protocolo 1: onda senoidal, A=20°, Fs=35Hz, Tc=20s, velocidad angular 1 rad/s					
Toma	r	q	RMSE UKF	RMSE EKF	RMSE RAW
1	0.0115	0.00150	0.9767	4.0075	1.6284
2	0.0125	0.00140	1.2338	3.4927	1.5969
3	0.0135	0.00130	1.5570	3.3923	1.6773
4	0.0145	0.00120	1.7357	3.7051	1.6032
5	0.0155	0.00110	1.6331	2.2598	1.6573

Fuente: Autor

Tabla 4. RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 5 rad/s.

Protocolo 1: onda senoidal, A=20°, Fs=35Hz, Tc=20s, velocidad angular 5 rad/s					
Toma	r	q	RMSE UKF	RMSE EKF	RMSE RAW
1	0.0115	0.00150	1.7185	2.1716	2.3441
2	0.0125	0.00140	1.6714	2.7123	2.3571
3	0.0135	0.00130	1.7778	3.9847	2.4511
4	0.0145	0.00120	1.8963	2.5083	2.2914
5	0.0155	0.00110	1.9724	2.6361	2.2015

Fuente: Autor

Tabla 5. RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 10 rad/s.

Protocolo 1: onda senoidal, A=20°, Fs=35Hz, Tc=20s, velocidad angular 10 rad/s					
Toma	r	q	RMSE UKF	RMSE EKF	RMSE RAW
1	0.0115	0.00150	2.8260	2.9150	4.0095
2	0.0125	0.00140	2.7374	3.6058	3.9121
3	0.0135	0.00130	1.9749	3.5032	4.4946
4	0.0145	0.00120	2.6162	5.7471	4.0821
5	0.0155	0.00110	2.4627	4.3169	3.9325

Fuente: Autor

Tabla 6. RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 15 rad/s.

Protocolo 1: onda senoidal, A=20°, Fs=35Hz, Tc=20s, velocidad angular 15 rad/s					
Toma	r	q	RMSE UKF	RMSE EKF	RMSE RAW
1	0.0115	0.00150	3.0604	3.9468	6.2643
2	0.0125	0.00140	2.7707	3.6852	6.2127
3	0.0135	0.00130	2.5218	2.7172	5.6735
4	0.0145	0.00120	3.3475	2.6614	5.1637
5	0.0155	0.00110	2.1974	3.1715	5.7678

Fuente: Autor

Los valores sombreados dentro de cada tabla representan el RMSE más bajo obtenido para cada filtro, es decir, el resultado de mayor eficiencia al cual se asocian los valores de r y q correspondientes.

De lo anterior se deduce:

- Los valores de RMSE presentados en los datos que carecen de filtrado (*RAW*) no siempre son los más altos de la toma, como por ejemplo la toma 2 de la tabla 3, lo cual demuestra que los filtros sin estar correctamente sintonizados no pueden reducir de forma adecuada la cantidad de error en las señales que procesan, por lo cual es necesario hacer una sintonización de estos.
- Es posible observar que, en determinados casos, en especial para velocidades angulares menores de 5 rad/s, el valor de RMSE para el filtro de Kalman Extendido resulta ser mayor que el de los datos *RAW*, lo cual indica que, si bien el filtro puede estar cumpliendo con su labor, algunas de sus características propias como la deriva está afectando negativamente la respuesta que produce.
- A partir de la señal *RAW*, se observa que la cantidad de error crece a medida que incrementa la velocidad angular del movimiento, hallando una relación directa entre cantidad de error y la velocidad angular.
- Se establece una relación entre los parámetros de desviación estándar y la eficiencia del filtro para cada velocidad medida. Si se analiza una tabla individual de datos del protocolo 1, tanto el UKF como el EKF responden mejor a determinados valores de q y r que a otros, y este proceso de comparación permite realizar la sintonización que establece el valor de los parámetros más óptimos.
- Una selección específica de los parámetros de desviación estándar r y q que se adapte a una determinada velocidad angular resultará inválida para otro valor de velocidad angular, ya que dichos parámetros son dependientes también de la velocidad de los movimientos realizados.
- En general, el filtro con mejor comportamiento observado en cuanto a la reducción del RMSE se presenta en el filtro de Kalman *Unscented*. Los valores sombreados que están dentro de cada tabla y que exponen el resultado de mayor eficiencia para cada filtro siempre resulta menor para el UKF versus el EKF en todas las velocidades angulares elegidas.

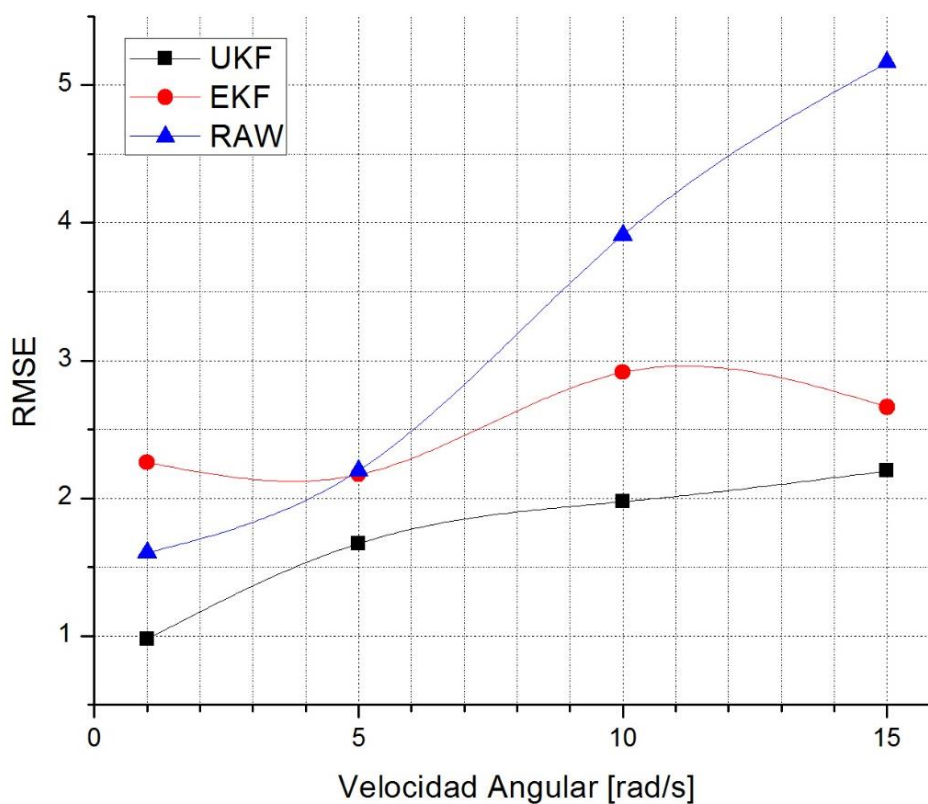
De esta manera y dando cumplimiento a la meta del protocolo 1, los valores de los parámetros de desviación estándar que sintonizan de manera óptima los filtros, logrando una mayor reducción del RMSE para las velocidades angulares específicas propuestas, se relacionan en la tabla 7. Adicionalmente se muestra en la figura 24 el valor del RMSE obtenido con los parámetros de desviación estándar óptimos para cada señal en las velocidades angulares seleccionadas.

Tabla 7. Parámetros de desviación estándar óptimos para cada velocidad angular específica.

Protocolo 1: desviaciones estándar óptimas para cada velocidad angular				
Velocidad Angular [rad/s]	UKF		EKF	
	r	q	r	q
1	0.0115	0.00150	0.0155	0.00110
5	0.0125	0.00140	0.0115	0.00150
10	0.0135	0.00130	0.0115	0.00150
15	0.0155	0.00110	0.0145	0.00120

Fuente: Autor

Figura 24. Valor del RMSE obtenido con los parámetros de desviación estándar óptimos para cada velocidad angular. Protocolo 1.



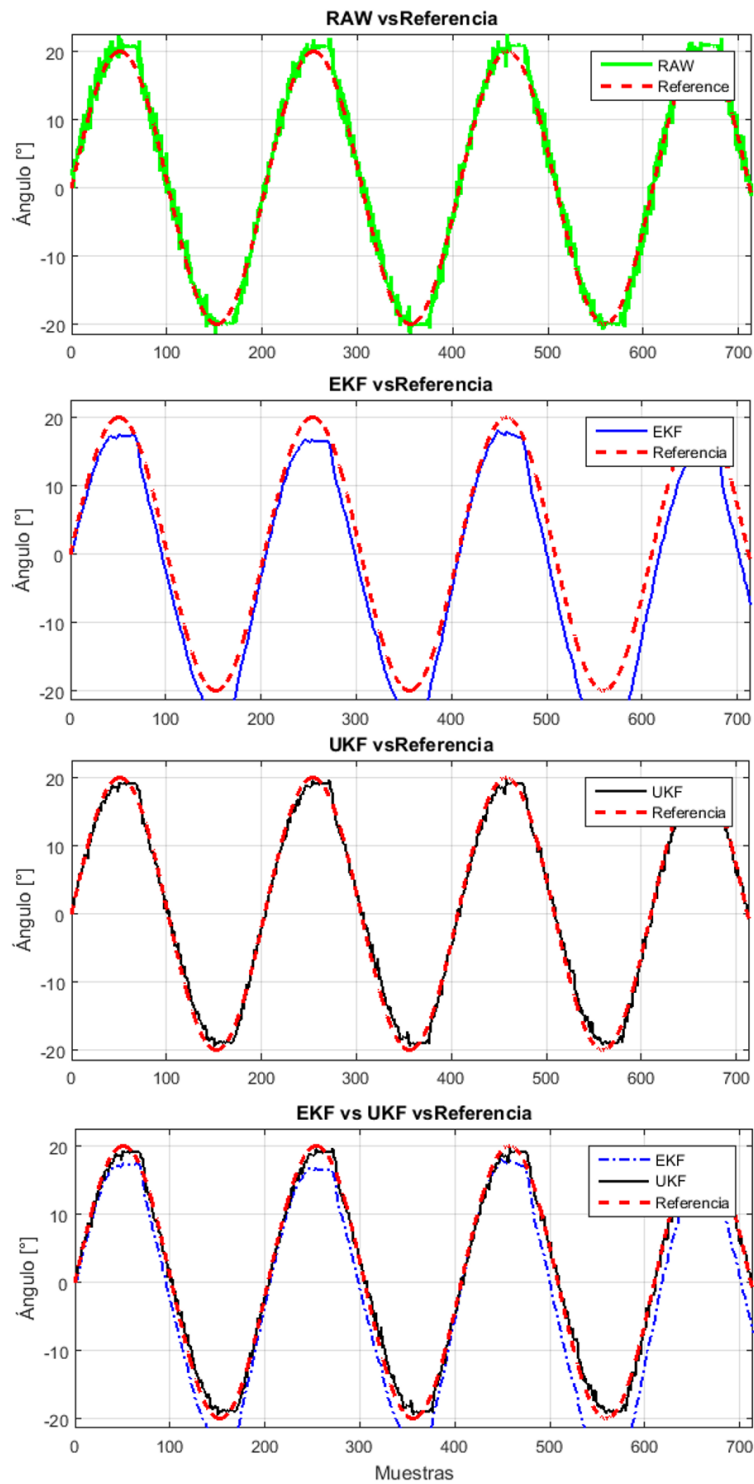
Fuente: Autor

Mediante la visualización de los valores de RMSE obtenidos a diferentes velocidades angulares y usando los parámetros de filtro óptimos para cada velocidad, se complementa la lista de conclusiones de la toma de datos para este protocolo y confirma el análisis realizado.

Una comparación gráfica adicional de las señales simuladas versus la función de referencia del sistema (señal senoidal, amplitud $A=20^\circ$) en la figura 25 y figura 26, muestra que el EKF posee una desviación o lejanía con respecto a los valores reales de la señal que se puede deber a la introducción de la deriva propia de este filtro, lo cual reduce su eficiencia a pesar de que posea un buen nivel de suavizado en la forma de onda.

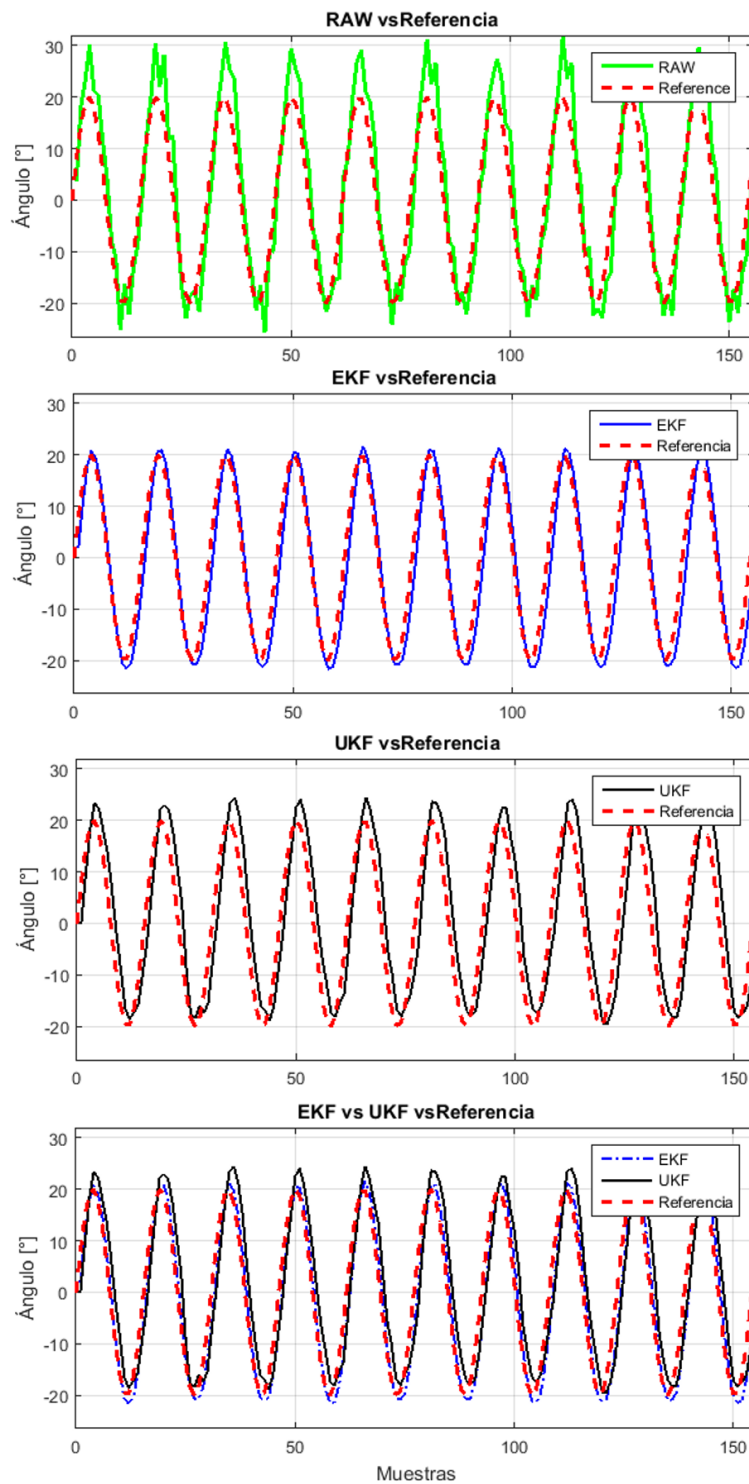
Por su parte, haciendo detalle en la figura 25, el UKF presenta una aproximación más cercana a los valores reales, con la ventaja de la supresión de picos y ruidos vistos en la señal sin procesamiento.

Figura 25. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 1 rad/s. Protocolo 1.



Fuente: Autor

Figura 26. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 10 rad/s. Protocolo 1.



Fuente: Autor

6.3.2 Resultados de las pruebas del protocolo 2.

En cumplimiento de la meta en el protocolo 2, se halla un valor de desviación estándar promediada para la medida (\bar{x}_r) y desviación estándar promediada para el proceso (\bar{x}_q).

Tabla 8. Parámetros de desviación estándar promediados.

Protocolo 2: parámetros de desviación estándar promediados				
Ítem	UKF		EKF	
	\bar{x}_{ru}	\bar{x}_{qu}	\bar{x}_{re}	\bar{x}_{qe}
Valor	0.013250	0.0013250	0.013250	0.0013250

Fuente: Autor

Estos parámetros de desviación estándar promediados se hallan utilizando una media aritmética de los parámetros de desviación estándar óptimos para cada velocidad angular específica, con el objetivo de poder usar un único valor de r y q válido para cualquier velocidad comprendida en el rango entre 1 y 15 rad/s.

Lograr obtener los parámetros óptimos en cada filtro para un rango de velocidades está justificado dentro de la investigación biomecánica, ya que los movimientos realizados por las extremidades superiores del cuerpo humano no son siempre a velocidades constantes, pero si se encuentran dentro de un rango determinado.

6.3.3 Resultados de la toma de datos establecida en el protocolo 3.

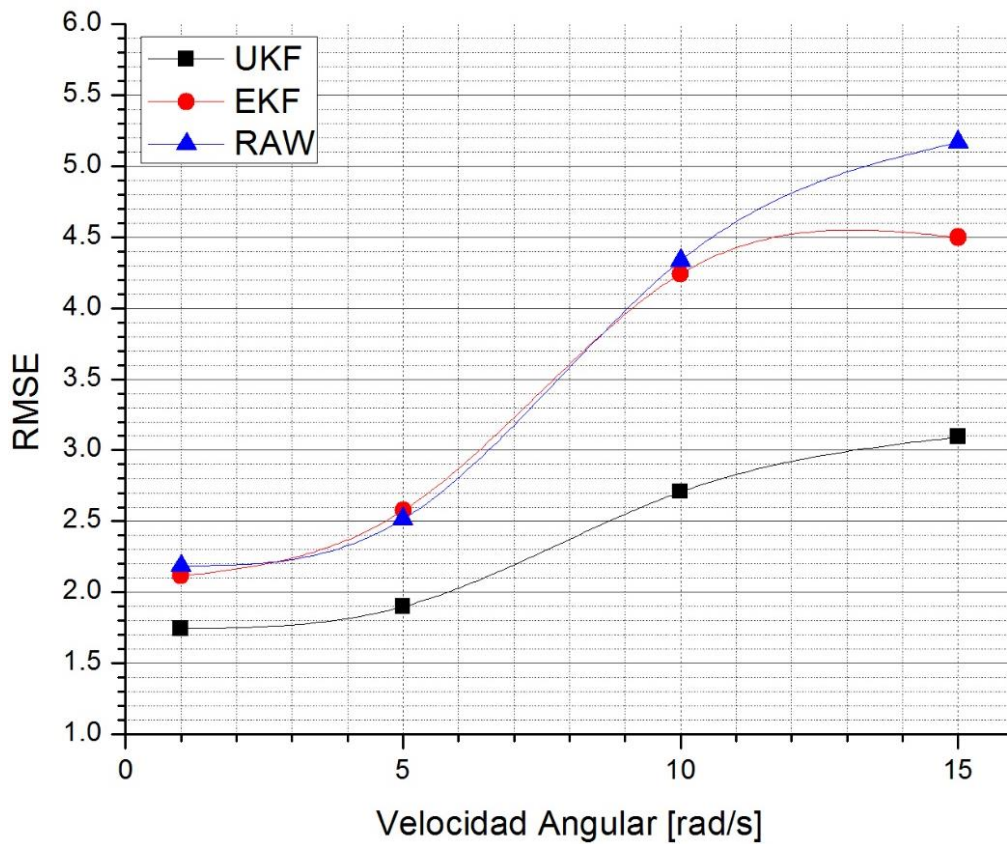
El protocolo 3 tiene por objetivo determinar si los valores encontrados de desviación estándar promediados son tan buenos como usar valores específicos para cada velocidad, pero con la ventaja de poder aplicar un único valor de r y q válido para cualquier velocidad comprendida en el rango entre 1 y 15 rad/s. El resultado de la toma de datos se presenta a continuación.

Tabla 9. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar específicas para cada velocidad en la medida y el proceso.

Protocolo 3: Se usan los valores de desviación estándar específicas para cada velocidad							
Velocidad Angular [rad/s]	UKF			EKF			RAW
	RMSE	r	q	RMSE	r	q	RMSE
1	1.7438	0.0115	0.00150	2.1145	0.0155	0.00110	2.1849
5	1.8993	0.0125	0.00140	2.5756	0.0115	0.00150	2.5151
10	2.7064	0.0135	0.00130	4.2424	0.0115	0.00150	4.3348
15	3.0938	0.0155	0.00110	4.4988	0.0145	0.00120	5.1685
\bar{x} RMSE	2.3608			3.3578			3.5508

Fuente: Autor

Figura 27. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar específica para cada velocidad en la medida y el proceso



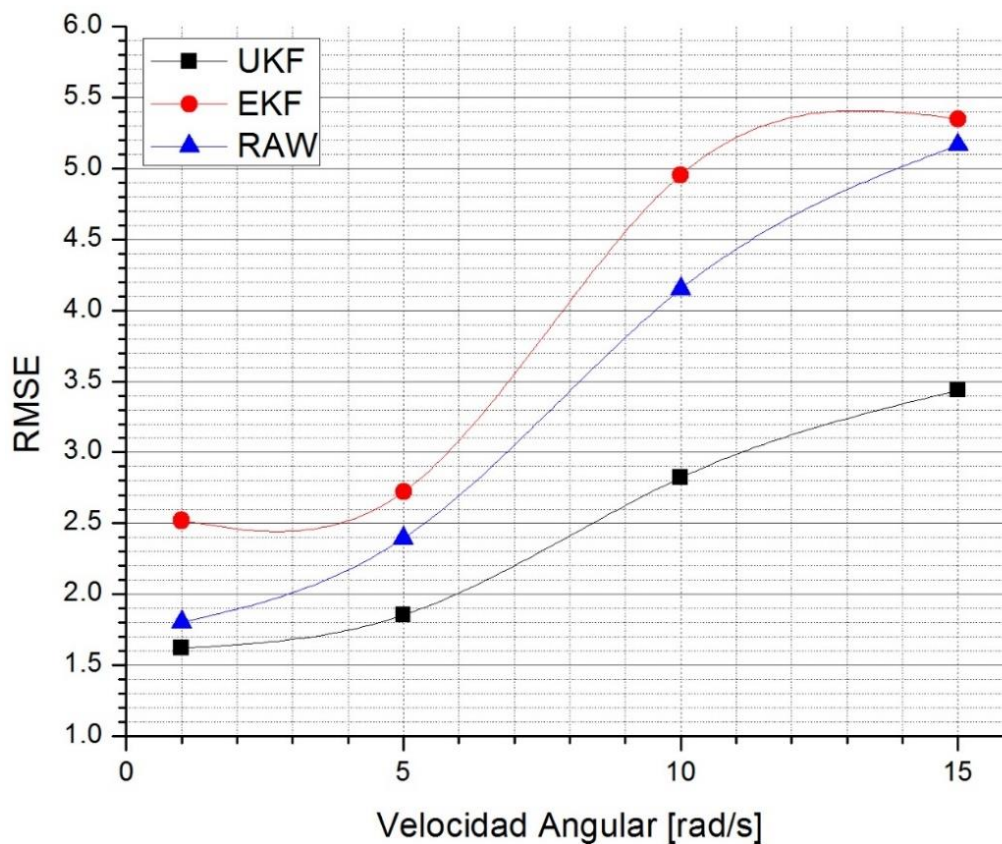
Fuente: Autor

Tabla 10. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar promediados en la medida y el proceso.

Protocolo 3: Segunda Toma - Se usa el valor de desviación estándar promediada								
Velocidad Angular [rad/s]	UKF			EKF			RAW	
	RMSE	\bar{x}_{ru}	\bar{x}_{qu}	RMSE	\bar{x}_{re}	\bar{x}_{qe}	RMSE	
	1	1.6219	0.01325	0.001325	2.5189	0.01325	0.001325	1.8019
	5	1.8536			2.7221			2.3946
	10	2.8211			4.9549			4.1503
15	3.4374	5.3494			5.1651			
\bar{x} RMSE	2.4335			3.8863			3.3780	

Fuente: Autor

Figura 28. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar promediados en la medida y el proceso.



Fuente: Autor

Para complementar el análisis, se incluye en la tabla 9 y 10, asociando la figura 27 y 28, el promedio de los valores RMSE obtenidos para cada señal. De forma gráfica se puede examinar que, a pesar de que haya diferencia en el RMSE obtenido usando los parámetros del filtro específicos a la velocidad angular versus a los parámetros promediados, la diferencia no está fuertemente marcada. Se realiza la comprobación numérica de dicha observación usando una diferencia entre los valores promedio del RMSE obtenidos usando los parámetros de desviación estándar óptimos para cada velocidad angular (escenario 1) versus los parámetros de desviación estándar promediado para el rango de velocidades (escenario 2).

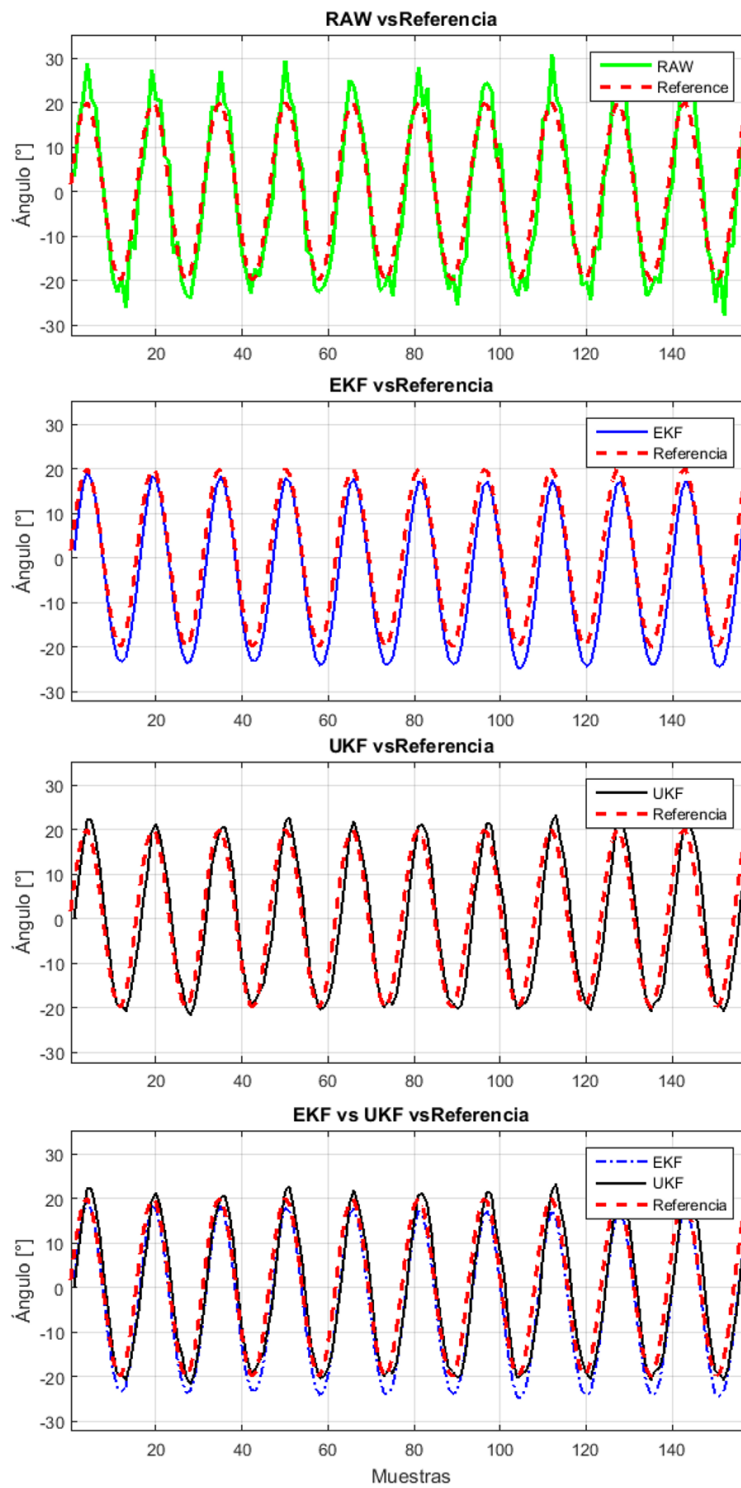
Tabla 11. Diferencia del RMSE promedio entre ambos escenarios del protocolo 3.

ítem	\bar{x} RMSE UKF	\bar{x} RMSE EKF
Escenario 1	2.3608	3.3578
Escenario 2	2.4335	3.8863
Diferencia	0.0727	0.5285

Fuente: Autor

- Se evidencia de forma numérica y analítica que, usando los parámetros de desviación estándar promediados para el rango de velocidades angulares, se obtiene una respuesta de los filtros casi tan buena como si se hubiese empleado los parámetros de desviación estándar específicos para cada velocidad angular, considerándose que para el análisis biomecánico en una aplicación real, la diferencia de 0.0727 grados en el filtro de Kalman *Unscented* y de 0.5285 grados en el filtro de Kalman Extendido no representa un error considerable en la información procesada.
- Como no hay una diferencia de error considerable entre ambas tomas, se establece el uso de los parámetros de desviación estándar promediados para el rango de velocidades angulares entre 1 y 15 rad/s, lo que permite fijar dichos valores para la recolección de datos sin importar la velocidad exacta a la cual se realice el movimiento, ideal para una aplicación real de captura de datos biomecánicos.
- Se observa que, independientemente de los parámetros usados para la sintonización del filtro, el filtro de Kalman *Unscented* sigue presentando menor RMSE en cualquier velocidad del movimiento biomecánico, indicando una ventaja sobre el filtro de Kalman Extendido.

Figura 29. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 15 rad/s. Protocolo 3 Escenario 2.



Fuente: Autor

6.3.4 Resultados de la toma de datos establecida en el Protocolo 4.

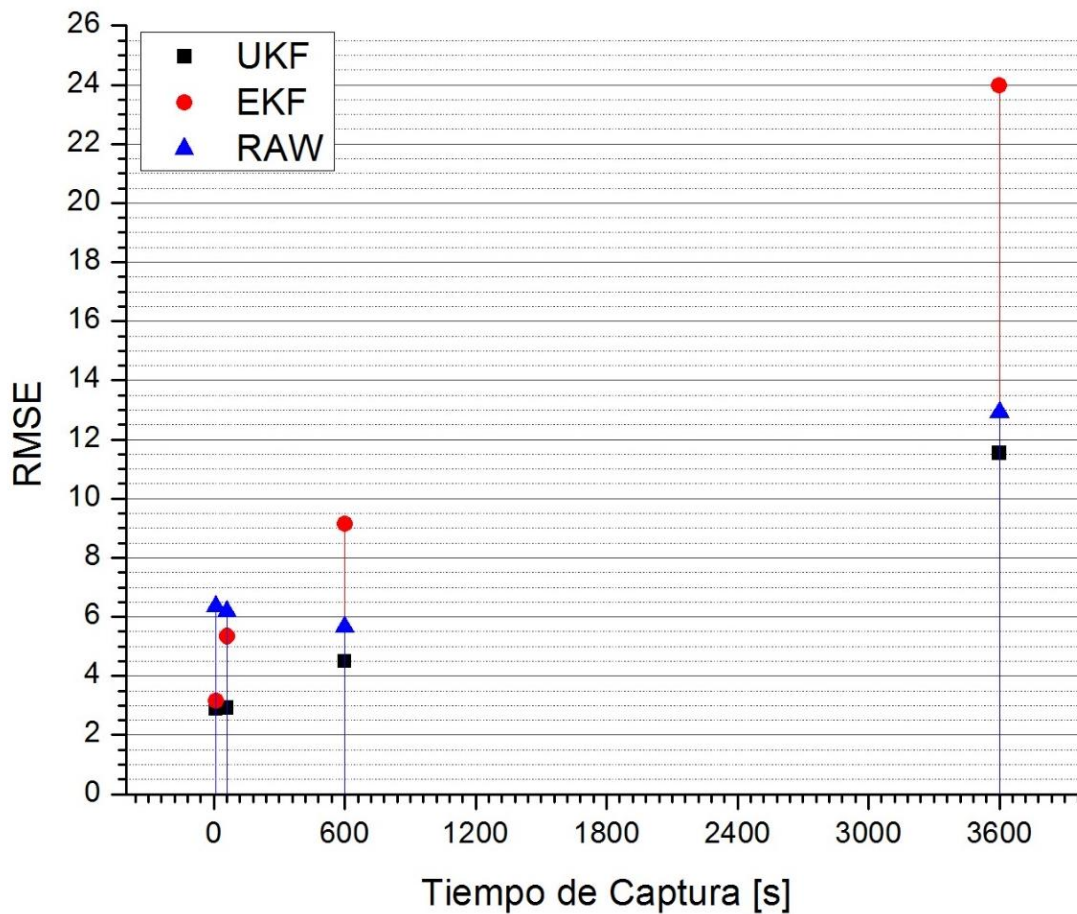
Tabla 12. Valor del RMSE obtenido en 1 y 15 rad/s con distintos tiempos de captura.

Protocolo 4: onda senoidal, $A=20^\circ$, $F_s=35\text{Hz}$, usando \bar{x}_r y \bar{x}_q						
Tiempo de Captura [s]	RMSE UKF		RMSE EKF		RMSE RAW	
	1 rad/s	15 rad/s	1 rad/s	15 rad/s	1 rad/s	15 rad/s
10	1.4414	2.8907	1.9481	3.1656	1.5302	6.3673
60	1.4284	2.9212	2.1654	5.3365	1.5705	6.1845
600	1.4163	4.4992	3.1621	9.1420	1.6442	5.6663
3600	2.8495	11.5380	3.0058	23.9760	3.0132	13.3716

Fuente: Autor

El tiempo de captura incremental de los datos biomecánicos busca demostrar la estabilidad de los filtros a través de múltiples iteraciones, ya que, si bien muchas veces los datos son capturados en lapsos de tiempo relativamente cortos, hay muchas otras aplicaciones que requieren un monitoreo continuo de las señales.

Figura 30. Valor del RMSE obtenido a diferentes tiempos de captura de las señales a velocidad angular de 15 rad/s.

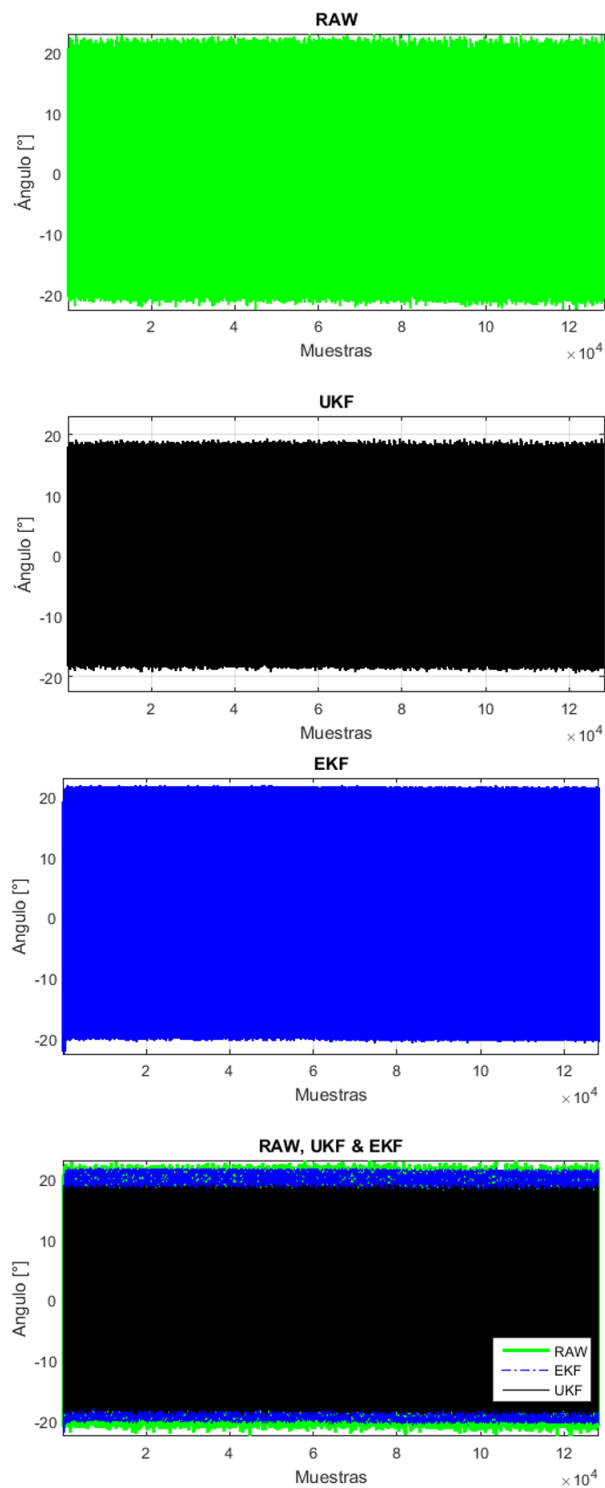


Fuente: Autor

En este caso, el filtro de Kalman Extendido es el que presenta menor eficiencia en tiempos prolongados de captura, ya que se hace visible el problema de deriva que el mismo filtro genera, lo cual se comprueba con la visualización de las señales en la figura 34 y 36. Sin embargo, se halla que el filtro de Kalman Extendido tiene una eficiencia similar, pero aún inferior que la del UKF únicamente para velocidades angulares bajas, en cualquier otro caso, el UKF resulta tener la mayor minimización del RMSE.

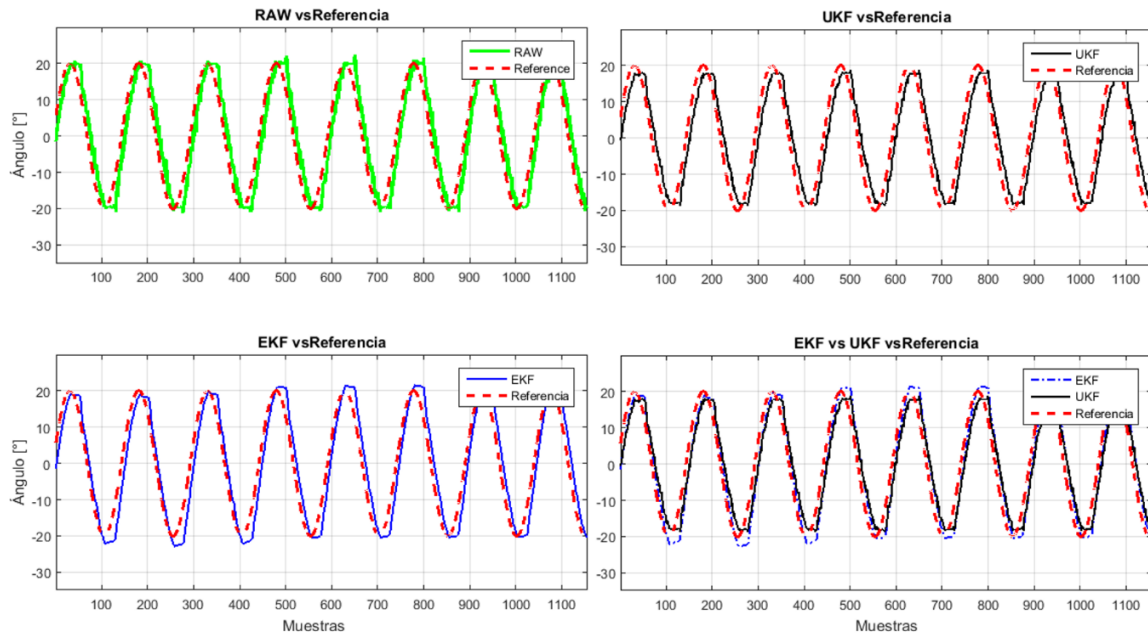
En términos comparativos de calidad del filtro en cuanto a minimización del RMSE y la estabilidad de su función con respecto al tiempo y al rango de frecuencias que van desde 1 a 15 rad/s, se puede concluir con toda seguridad que el filtro de Kalman *Unscented* es el más óptimo para ser usado en aplicaciones biomecánicas donde se haga captura de movimiento de flexión y extensión en los miembros superiores del cuerpo humano.

Figura 31. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 1 rad/s y tiempo de captura 3600 s.



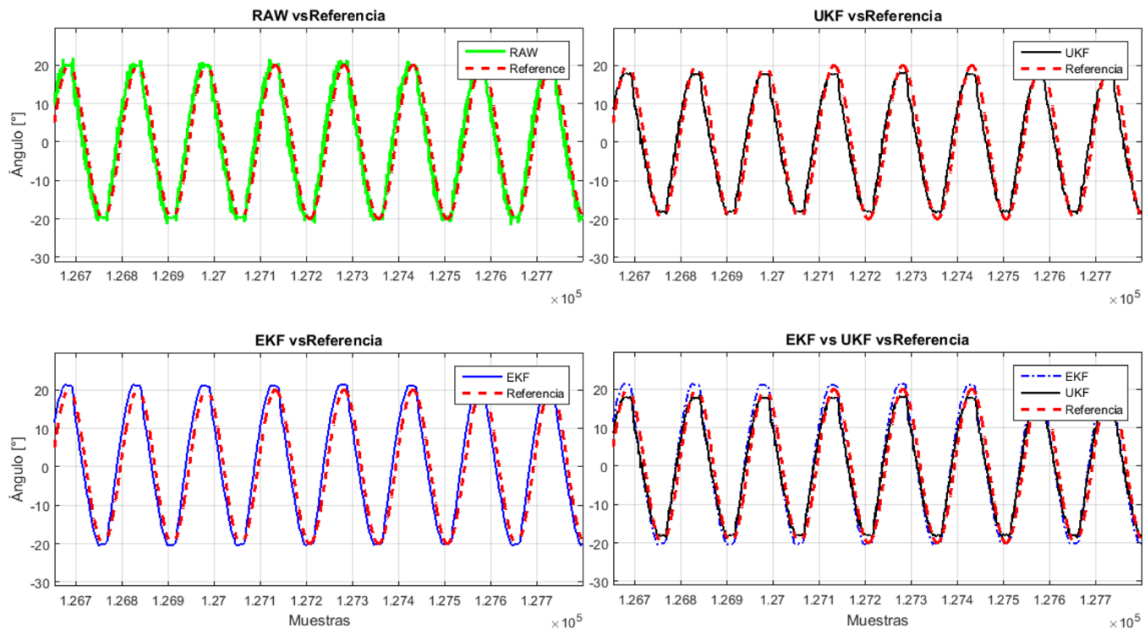
Fuente: Autor

Figura 32. Detalle de la forma de onda al iniciar la captura, velocidad angular de 1 rad/s y tiempo de captura 3600 s.



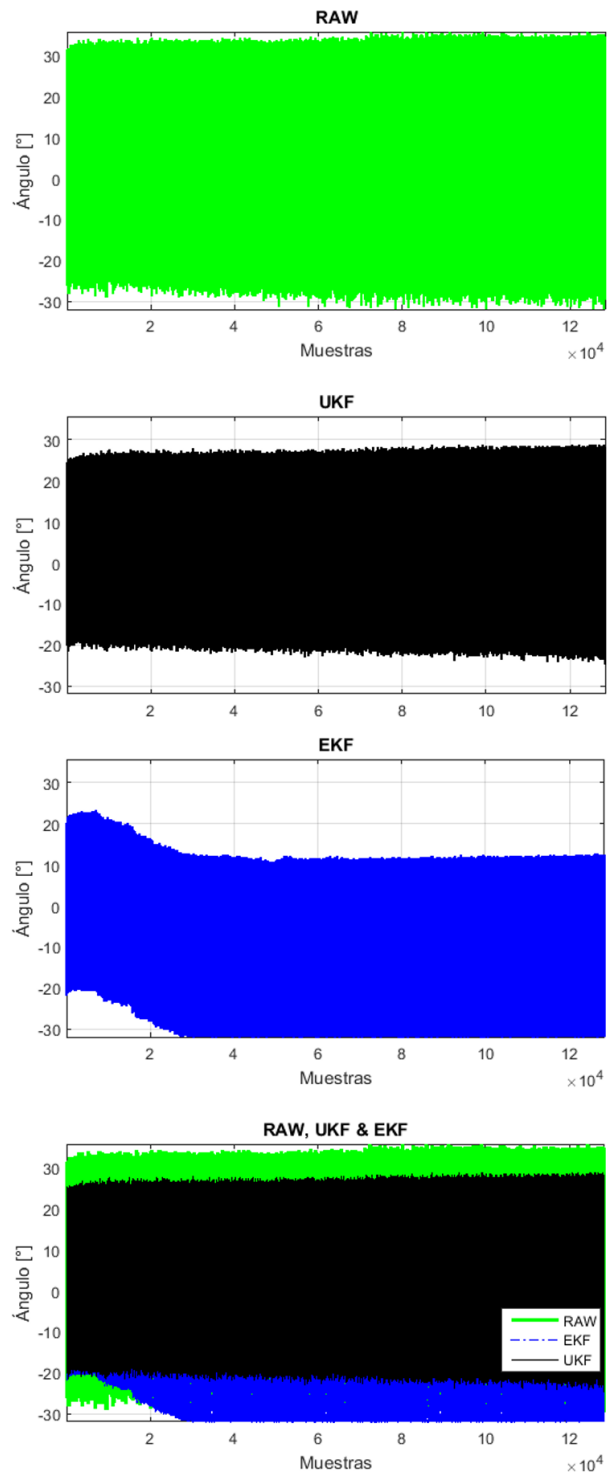
Fuente: Autor

Figura 33. Detalle de la forma de onda al finalizar la captura, velocidad angular de 1 rad/s y tiempo de captura 3600 s.



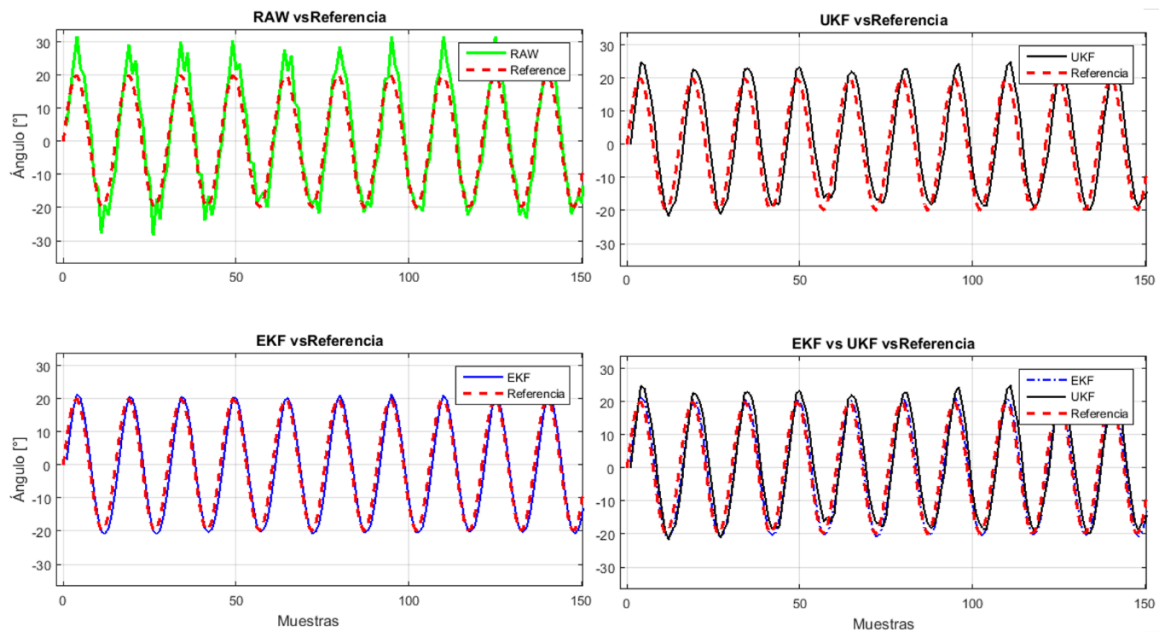
Fuente: Autor

Figura 34. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 15 rad/s y tiempo de captura 3600 s.



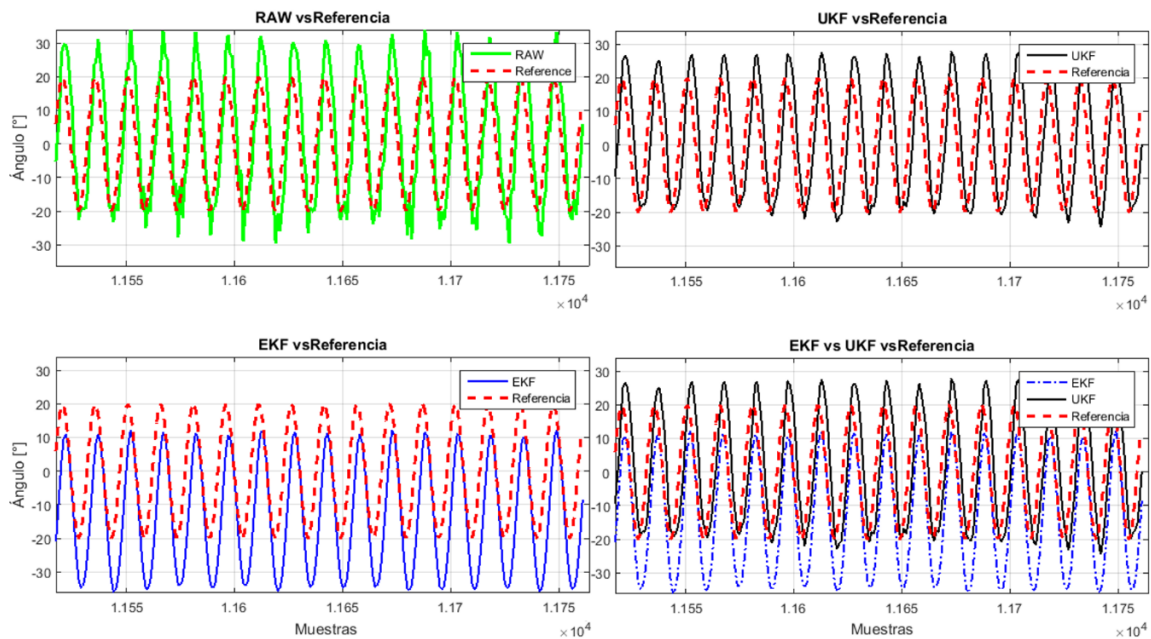
Fuente: Autor

Figura 35. Detalle de la forma de onda al iniciar la captura, velocidad angular de 15 rad/s y tiempo de captura 3600 s.



Fuente: Autor

Figura 36. Detalle de la forma de onda al finalizar la captura, velocidad angular de 15 rad/s y tiempo de captura 3600 s.



Fuente: Autor

6.4 CAPTURA Y ANÁLISIS DE DATOS BIOMECÁNICOS

6.4.1 Protocolo para la obtención de los datos biomecánicos.

Usando los parámetros de los filtros UKF y EKF sintonizados, se realizan cinco tomas de datos a diferentes velocidades para un movimiento real de flexión y extensión biomecánico, a una frecuencia de muestreo $F_s=35$ Hz con amplitud y tiempo de captura variables, con el propósito de analizar los valores de máxima flexión / extensión; ya que, en el registro de datos biomecánicos en aplicaciones como la rehabilitación física de personas, en el software se registra dichos valores.

6.4.2 Análisis de los datos biomecánicos.

Para el análisis de los datos biomecánicos, no es posible analizar el error en términos del RMSE en este caso, puesto que no existe una señal con valores uniformes (velocidades angulares, amplitud articular) que pueda utilizarse como referencia. Se analizará en cambio los valores máximos de flexión y extensión alcanzados, sobre los cuales se determinará cual filtro obtuvo los datos más cercanos a la estimación real. Las tablas de los datos biomecánicos se presentan a continuación.

Tabla 13. Valores estimados para el movimiento biomecánico.

Estimación en datos biomecánicos				
Velocidad Angular [rad/s]	Amplitud Estimada [°]	Offset Estimado [°]	Valores Estimados	
			mín.	máx.
~0.5	23.15	-5.09	-28.23	18.06
~2	24.23	-0.54	-24.77	23.69
~4	35.19	-19.76	-54.95	15.43
~6	31.11	-11.07	-42.18	20.05
~8	28.66	-10.42	-39.08	18.24

Fuente: Autor

Como no se dispone de una referencia, todos los parámetros de la tabla 13 son estimados a partir de los datos reales de entrada. Para determinar la velocidad angular, el programa de análisis en MATLAB realiza una transformada de Fourier rápida que determina la frecuencia de las ondas generadas, y con este una aproximación a la velocidad del movimiento biomecánico generado en el brazo. Se analizaron los valores máximos y mínimos promedio de la señal, con la cual se obtiene la amplitud articular generada por la articulación del codo.

En la tabla 14, se presenta los valores de máxima flexión y extensión de los datos biomecánicos aplicando los filtros de Kalman.

Tabla 14. Valores de máxima flexión y extensión de los datos biomecánicos capturados.

Datos Biomecánicos, $F_s=35\text{Hz}$, usando \bar{x}_r y \bar{x}_q						
Velocidad Angular [rad/s]	UKF		EKF		RAW	
	mín.	máx.	mín.	máx.	mín.	máx.
~0.5	-16.72	26.89	-9.21	38.43	-18.67	29.87
~2	-22.97	24.05	-24.03	25.14	-26.86	26.53
~4	-56.48	16.96	-51.39	17.45	-64.80	21.27
~6	-45.60	23.47	-33.88	24.92	-51.32	26.82
~8	-46.66	25.82	-18.89	30.85	-78.65	34.02

Fuente: Autor

Cabe resaltar que las velocidades angulares están determinadas por el movimiento del brazo, y esta es variante.

Al comparar los máximos y mínimos de las señales capturadas y filtradas, versus los valores estimados hallados usando el programa de análisis en MATLAB, se obtiene la tabla 15 de resultados.

Tabla 15. Diferencia entre los valores máximos y mínimos de las señales biomecánicas versus los valores estimados.

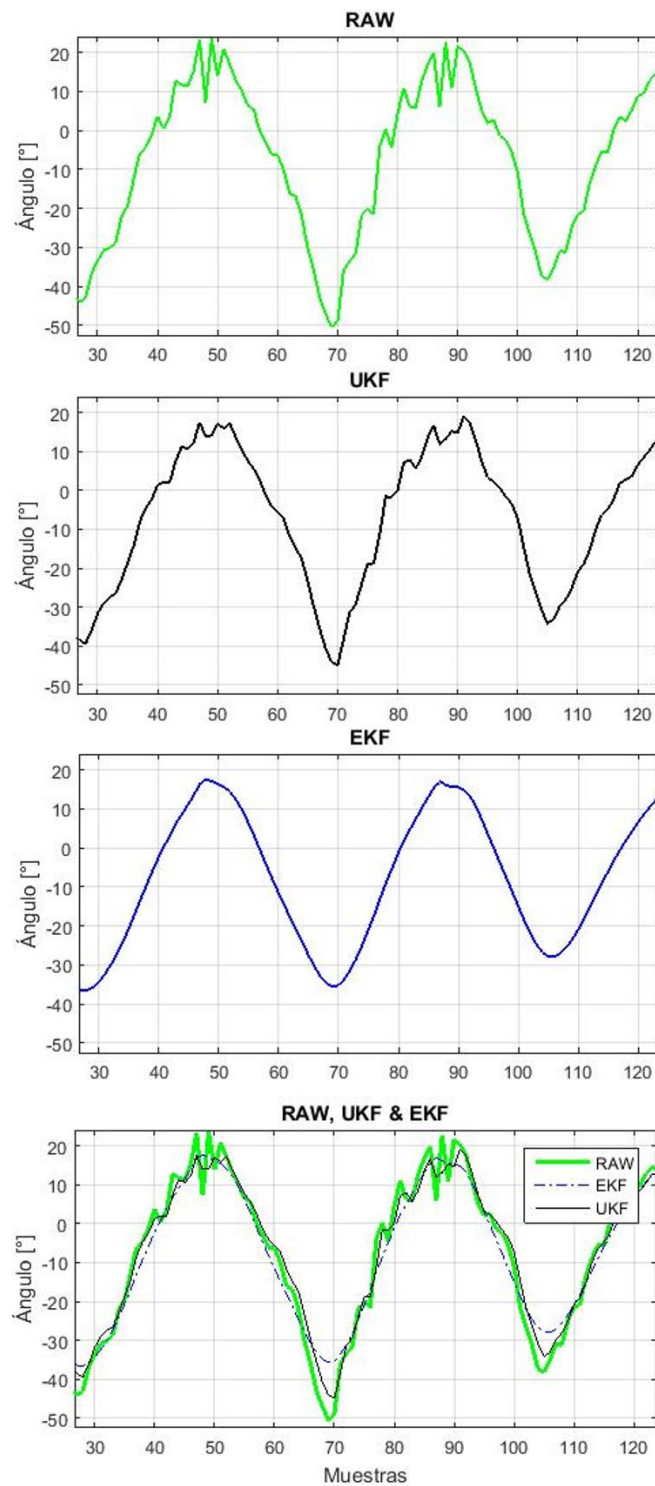
Evaluación del rendimiento con base a valores máximos y mínimos						
Angular Vel. [rad/s]	Diferencia UKF		Diferencia EKF		Diferencia RAW	
	mín.	máx.	mín.	máx.	mín.	máx.
~0.5	-11.51	-8.83	-19.02	-20.37	-9.56	-11.81
~2	-1.80	-0.36	-0.74	-1.45	2.09	-2.84
~4	1.53	-1.53	-3.56	-2.02	9.85	-5.84
~6	3.42	-3.42	-8.30	-4.87	9.14	-6.77
~8	7.58	-7.58	-20.19	-12.61	39.57	-15.78

Fuente: Autor

En color sombreado se encuentran los valores reales menos distantes de los valores estimados, dando un indicador de cuál de las señales se acerca más en términos de sus valores pico.

Como es evidente, el filtro UKF sigue teniendo mejor rendimiento que el EKF, aun tratándose de señales biomecánicas.

Figura 37. Forma de onda al capturar movimiento biomecánico de miembro superior (articulación del codo), velocidad angular aprox. de 6 rad/s y tiempo de captura 10 s.

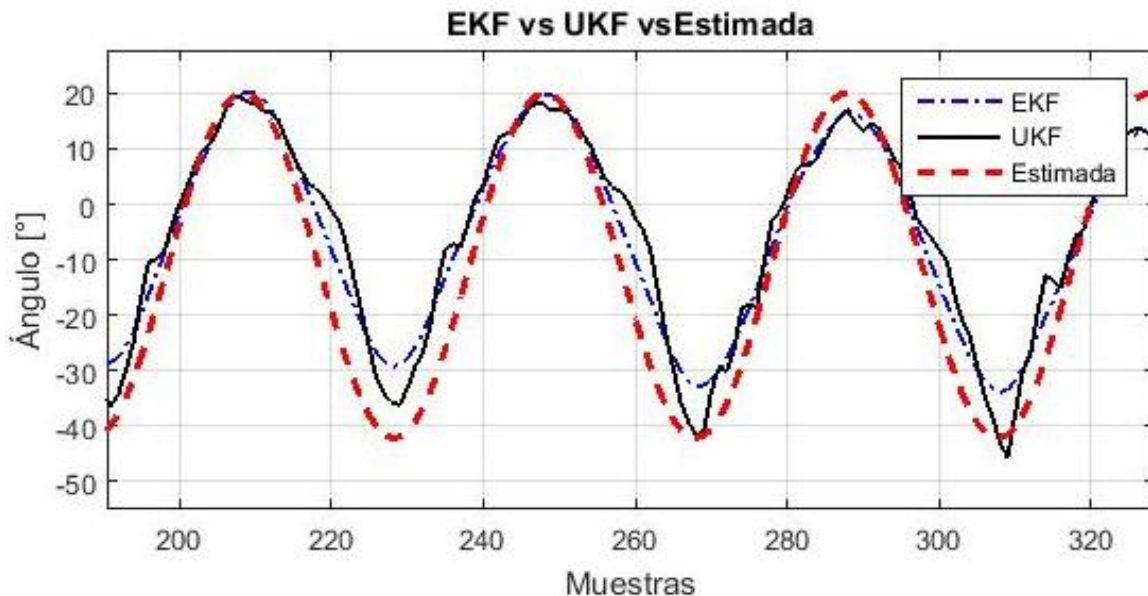


Fuente: Autor

En la figura 37 se evidencia el mejor desempeño obtenido por el UKF frente al EKF y la señal sin filtrar.

Además, en la figura 38, se puede visualizar que en los valores de máxima flexión los filtros responden de manera similar al acercarse al valor de la señal estimada, mientras que, en los valores de máxima extensión, el UKF logra una mejor aproximación, concluyendo que este presenta un mejor desempeño.

Figura 38. Comparación de la forma de onda filtrada frente a la señal estimada, velocidad angular aprox. de 6 rad/s y tiempo de captura 10 s.



Fuente: Autor

6.5 ANÁLISIS DE COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DE LOS ALGORITMOS FILTRO DE KALMAN UNSCENTED Y EXTENDIDO.

Para el caso concerniente a esta investigación, el análisis de complejidad computacional de los algoritmos de filtrado brinda una idea de qué tan costoso resulta para el procesador llevar a cabo las operaciones que permiten manipular la señal. Este análisis se realiza por medio de la herramienta SourceMonitor (*), la cual permite cargar los archivos de código fuente y analizar su complejidad de acuerdo con lo establecido en el marco teórico.

(*) Herramienta SourceMonitor, freeware desarrollado por Campwood Software. Disponible en: <http://www.campwoodsw.com/sourcemonitor.html>

6.5.1 Análisis de complejidad del filtro de Kalman Extendido.

El filtro de Kalman Extendido está implementado mediante una librería con sus definiciones en un archivo externo, código fuente en C++. La tabla 16 muestra un resumen de los parámetros que ayudan a determinar la complejidad computacional del filtro.

Tabla 16. Parámetros de complejidad Computacional medidos en el EKF.

LDC	PLCC	NDD	PDR	MPC	PMB	PPB	NDS	VDCM	VDC
221	18%	142	12%	13	3	1.91	91	12	5.60

Fuente: Autor

Para 221 líneas de código que contiene el EKF, se encontró una complejidad computacional promedio de 5.60. El número de declaraciones juega un papel importante a la hora de calcular la complejidad computacional promedio, ya que determina el número de rutinas y funciones que comprenden el filtro. Para este análisis no se tuvo en cuenta las llamadas a funciones externas como conversión numérica, de constantes y operaciones matemáticas simples.

En la figura 39 presentada a continuación se puede apreciar el balance del código mediante una gráfica de Kiviat, la cual pondera los resultados para ofrecer una visión de la estructura del código basándose en el número de líneas de código. Se presenta una gráfica para el código del filtro y otra para el archivo de declaraciones, sin embargo, los resultados presentados en la tabla comprenden la suma de ambos.

Figura 39. Balance computacional del código del filtro de Kalman Extendido.

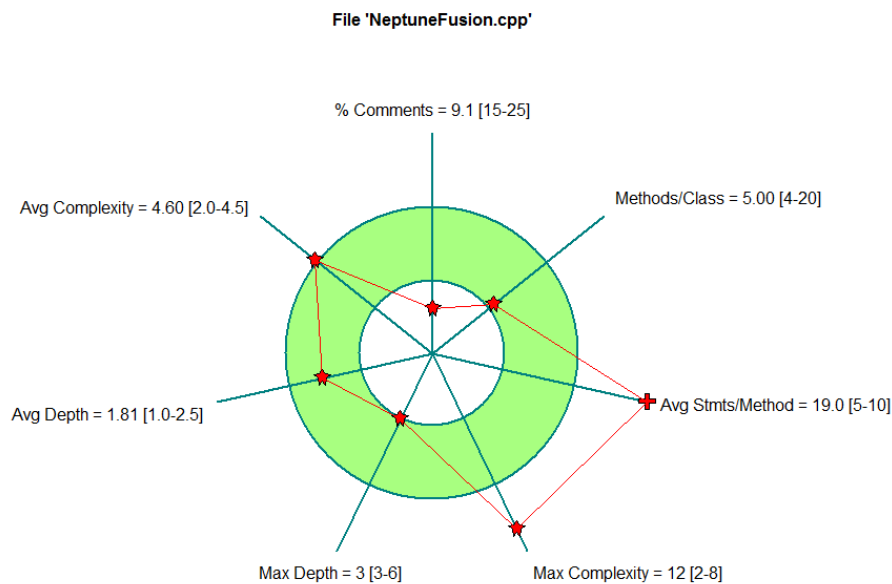
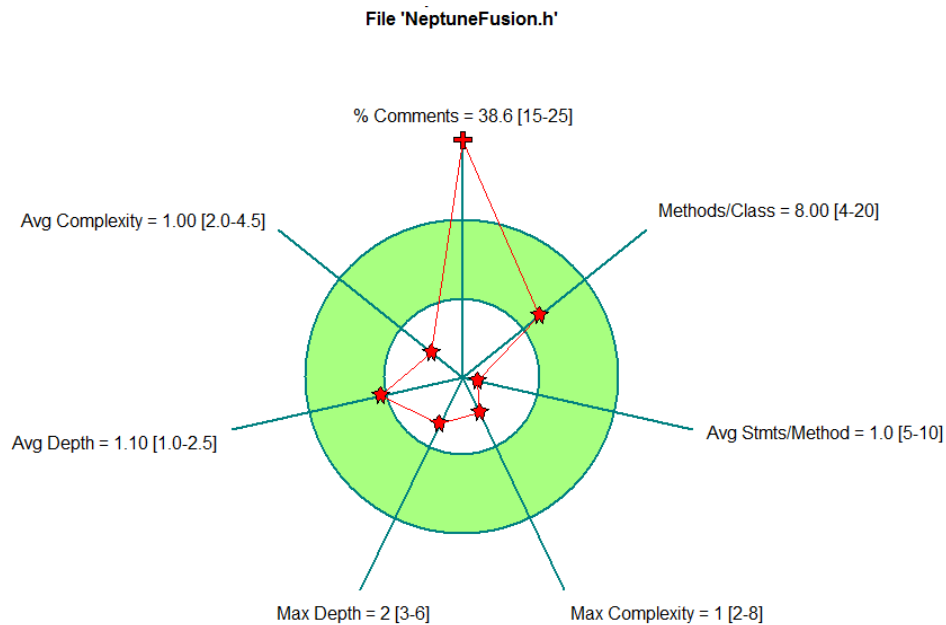


Figura 39. (Continuación)



Fuente: Autor

Valores por dentro del borde interno del grafico de Kiviatic significa que se encuentra por debajo del estándar con respecto a las líneas de código del archivo, mientras que los valores por encima del borde externo significan que el parámetro está por encima del estándar con respecto a las líneas de código del archivo. Lo ideal es que haya un balance alrededor del círculo dentro de la franja sombreada. Para el caso del filtro de Kalman Extendido se puede observar que tiene una función muy densa que representa el valor de complejidad máximo reportado, pero con respecto al número de líneas de código, todo el filtro tiene una complejidad al límite de los estándares.

6.5.2 Análisis de complejidad del filtro de Kalman *Unscented*.

El filtro de Kalman *Unscented* está implementado mediante una librería con sus definiciones en un archivo externo, código fuente en C++. La tabla 17 muestra un resumen de los parámetros que ayudan a determinar la complejidad computacional del filtro.

Tabla 17. Parámetros de complejidad computacional medidos en el UKF.

LDC	PLCC	NDD	PDR	MPC	PMB	PPB	NDS	VDCM	VDC
464	22%	275	22%	16	5	1.53	102	14	4.44

Fuente: Autor

Para 464 líneas de código que contiene el UKF, se encontró una complejidad computacional promedio de 4.44. A pesar de que el número de líneas es elévalo, la densidad no es tanta como la del EKF, y su complejidad por ende se reduce. Como dato importante se puede notar que el número de declaraciones (275 en total para 464 líneas versus 142 en total para 221 líneas en el EKF) es bastante grande, lo cual supone un tratamiento de la señal más elevado que en el EKF, pero sin consumir demasiados recursos matemáticos

En la figura 40 presentada a continuación se puede apreciar el balance del código mediante una gráfica de Kiviat. Se presenta una gráfica para el código del filtro y otra para el archivo de declaraciones, sin embargo, los resultados presentados en la tabla comprenden la suma de ambos.

Figura 40. Balance computacional del filtro de Kalman *Unscented*.

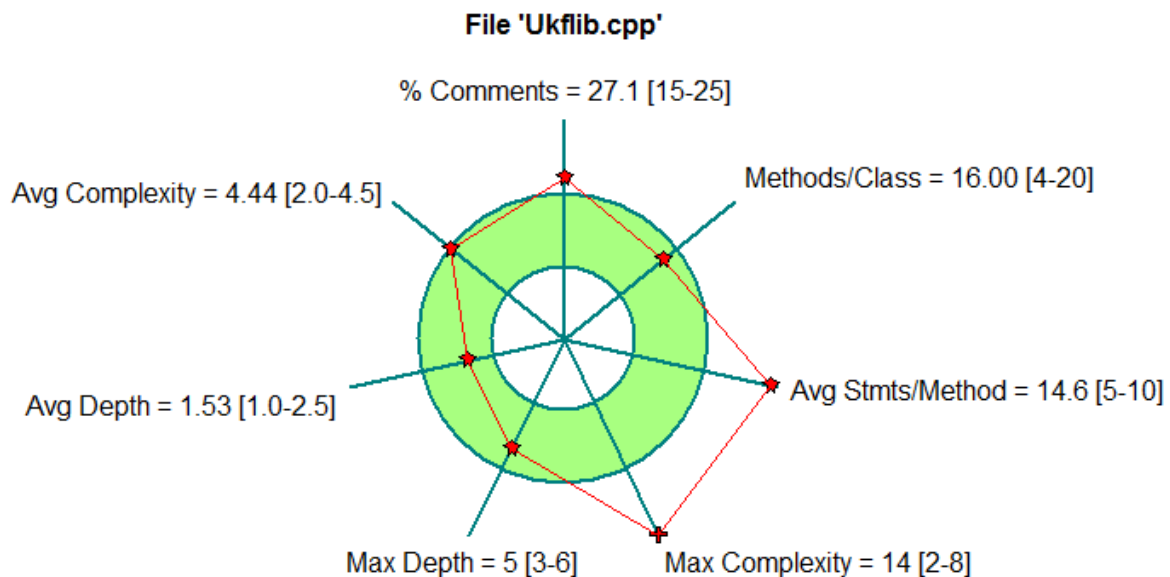
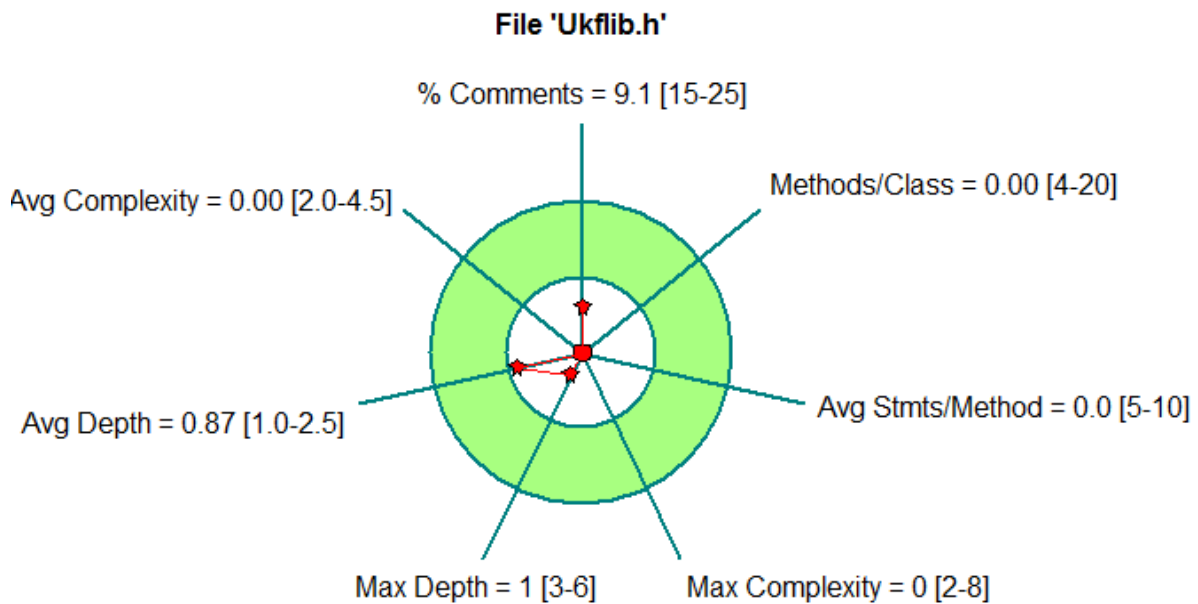


Figura 40. (Continuación)



Fuente: Autor

Lo ideal es que haya un balance alrededor del círculo dentro de la franja sombreada. Para el caso del filtro de Kalman Extendido se puede observar que tiene una función muy densa que representa el valor de complejidad máximo reportado, pero con respecto al número de líneas de código, todo el filtro tiene una complejidad al límite de los estándares, tal cual como en el EKF.

6.5.3 Análisis de complejidad conjunta de los filtros de Kalman.

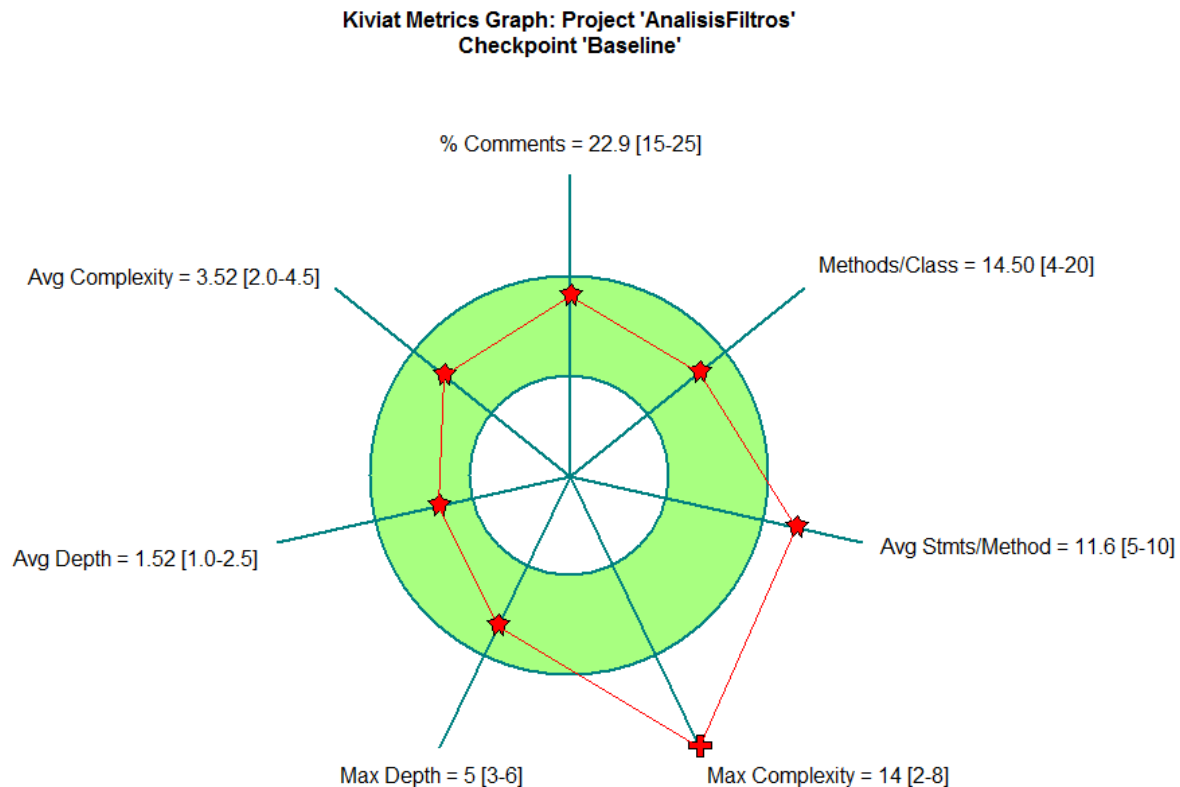
analizados de forma conjunta, los algoritmos de filtro de Kalman en el sistema de captura de movimiento biomecánico representan apenas una pequeña fracción de la carga total del microcontrolador en el dispositivo embebido, ya que las funciones restantes se encargan de la comunicación con los MPU, la correcta transformación de la información y la presentación de señales usables al usuario. Se analizan los mismos parámetros tenidos en cuenta en cada prueba individual, los cuales se resumen en la tabla 18 y la figura 41.

Tabla 18. Parámetros de complejidad computacional conjunta.

LDC	PLCC	NDD	PDR	MPC	PMB	PPB	NDS	VDCM	VDC
685	23%	417	16%	14.5	5	1.52	193	14	3.52

Fuente: Autor

Figura 41. Balance computacional de los Filtros de Kalman.



Fuente: Autor

Los resultados anteriores muestran que, si bien la cantidad de líneas de código es elevada, la complejidad se reduce dado a que se compensan las funciones de ambos filtros. El diagrama de Kiviat muestra que, en relación al número de líneas de código, la implementación de los filtros es óptima en términos de complejidad computacional, ya que la mayoría de parámetros evaluados están dentro de la región sombreada de la gráfica.

Los dos valores por encima de los estándares son el número de máxima complejidad y el número de declaraciones por método, lo cual sugiere que pueden dividirse de una mejor manera las tareas de los filtros, en especial del UKF (que presenta la función con la complejidad más alta de todas) para que la complejidad no sea tan alta en una sola implementación, y el procesador pueda optimizar más el uso de los recursos.

A nivel comparativo específico, el filtro de Kalman Unscented tiene más líneas de código con una complejidad menor, y esto se puede deber a que este filtro necesita más líneas de código para la generación y selección de los puntos Sigma, pero esto no representa un desafío mayor para el procesador. En cuanto al número de

complejidad computacional promedio, se evidencia que el EKF presenta mayor costo, y numéricamente hablando, el uso del UKF tiene un ahorro del costo en complejidad computacional del 20.71% para la versión creada específicamente para la investigación.

7. CONCLUSIONES

El uso de tecnologías recientes para la captura de movimiento biomecánico, tales como las MPU usados en el proyecto, permite una evaluación menos subjetiva cuando se trata de la valoración de movimientos relacionados con el cuerpo humano.

Se evidenció un mejor rendimiento del filtro de Kalman *Unscented* en comparación con el filtro de Kalman Extendido para el tratamiento de datos biomecánicos, en específico de flexión y extensión, teniendo en cuenta como parámetro la reducción del RMSE en la señal proporcionada con respecto a la plataforma de referencia.

Se evidenció una mejor aproximación a los valores reales de la señal biomecánica en el filtro de Kalman *Unscented* en comparación con el filtro de Kalman Extendido teniendo en cuenta los valores de máxima flexión y máxima extensión estimados en un movimiento biomecánico de las extremidades superiores.

El análisis de complejidad computacional mostró que el Filtro de Kalman *Unscented* presenta menos impacto en la ejecución del procesador al tener una complejidad computacional promedio menor a la del filtro de Kalman Extendido, más sin embargo ninguno de los dos filtros presenta un costo computacional elevado.

La oportunidad de participación en un proyecto de investigación en apoyo con un grupo de investigación reconocido y el trabajo en el área de procesamiento de señales, dispositivos embebidos y biomecánica, son propicios para dar continuidad a la temática en futuras investigaciones y consecuentemente alcanzar niveles de educación en posgrado.

8. DIVULGACIÓN

La presente investigación tiene aportes de trabajos realizados anteriormente en conjunto con el Grupo de Investigación en Software (GIS), en donde se destaca la publicación titulada “Plataforma de Captura y Análisis de Información Biomecánica Usando Sensores Inerciales: Calibración y Validación” presentada en calidad de ponencia de tipo internacional en el evento Pan American Health Care Exchanges (PAHCE) realizada en Brasil, año 2014, en donde se presenta los resultados obtenidos en los procesos de calibración y validación de un sistema de captura de movimiento basado en Unidades de Procesamiento de Movimiento, sentando las bases instrumentales y de análisis de la presente investigación. Dicha ponencia surgió del macro proyecto titulado “DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA PLATAFORMA DE CAPTURA Y ANÁLISIS DE SEÑALES BIOMECÁNICAS” presentado por el Grupo de Investigación en Software y avalado por la Dirección de Investigaciones de la UPTC. Se propuso como objetivo diseñar e implementar una plataforma tecnológica que pueda ser utilizada para la captura y análisis de señales biomecánicas de los miembros superiores del cuerpo humano de alta precisión, en donde se realizó la caracterización de los sensores inerciales como medio de captura del movimiento, la validación de los resultados preliminares, entre otros.

Adicionalmente, se realiza la publicación titulada “Propuesta de arquitectura para un sistema de apoyo a telerehabilitación de miembro superior capturando señales biomecánicas” en la Revista Facultad de Ingeniería (Fac. Ing.), Septiembre-Diciembre 2015, donde se propone un sistema para Telerehabilitación de personas con trastornos motores del miembro superior y se describen de manera breve los módulos que integran el sistema: sistema de captura basado en sensores inerciales y captura con cámara, estimador implementado mediante el filtro de Kalman, entre otros detalles.

BIBLIOGRAFIA

AGHAKOUCHAK, Amir. Modeling Radar Rainfall Estimation Uncertainties: Random Error Model. Journal of Hydrologic Engineering, 2010. p. 265-274.

ALLOTA, Benedetto, et al. A comparison between EKF-based and UKF-based navigation algorithms for AUVs localization. ISME - Interuniversity Center of Integrated Systems for the Marine Environment, 2015.

ANGELL, James B, et al. Silicon Micromechanical Devices. Scientific American, 1983. p. 44-55.

ARASARATNAM, Ienkar, y HAYKIN, Simon. Cubature Kalman Filters. Cognitive Systems Laboratory, Department of Electrical and Computer Engineering, McMaster University, Hamilton, 2009.

BRASSARD, G y BRATLEY, P. Fundamentos de Algoritmia. Prentice Hall, 1997. p. 461.

CAO, Yi. Learning the Extended Kalman Filter. Mathworks File Exchange, 2008. [en línea]. <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18189-learning-the-extended-kalman-filter>> [citado en 29 de Marzo de 2016]

CAO, Yi. Learning the Unscented Kalman Filter. Mathworks File Exchange, 2008. [en línea]. <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18217-learning-the-unscented-kalman-filter>> [citado en 29 de Marzo de 2016]

CHANG, Hsun-Hsien y MOURA, José María. Biomedical Signal Processing. Biomedical Engineering and Desing Handbook, McGraw Hill, 2010. p. 559-579.

COHEN, J, et al. Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences. Lawrence Erlbaum Associates, 2003.

CUEVAS, Erik, et al. Kalman filter for vision tracking. Freie Universität Berlin, Institut für Informatik, 2005.

D'ALFONSO, Luigi, et al. Mobile robot localization via EKF and UKF: A comparison based on real data. Robotics and Autonomous Systems, 2015. p. 122-127.

DABLEMONT, S, et al. Forecasting "High" and "Low" of financial time series by Particle systems and Kalman filters. Université catholique de Louvain, Machine Learning Group, DICE, 2007.

DANG, Wenbing, y SCHARF, Louis L. Extensions to the Theory of Widely Linear Complex Kalman Filtering. Department of Electrical and Computer Engineering, Colorado State University, Fort Collins, 2011.

DELL. Nonlinear Estimations. [en línea].
<<http://documents.software.dell.com/Statistics/Textbook/Nonlinear-Estimation>>
[citado en 19 de Marzo de 2016]

EMBS. Biomechanical Signal Processing. [en línea]. <<http://www.embs.org/about-biomedical-engineering/our-areas-of-research/biomedical-signal-processing/>>
[citado en 29 de Marzo de 2016]

EPSON. Gyro sensors - How they work and what's ahead. [en línea].
<http://www5.epsondevice.com/en/information/technical_info/gyro/> [citado en 28 de Marzo de 2016]

ESME, Bilgin. Kalman Filter For Dummies, a mathematically challenged man's search for scientific wisdom. [en línea].
<<http://bilgin.esme.org/BitsAndBytes/KalmanFilterforDummies>> [citado en 28 de Marzo de 2016]

EVENSEN Geir. The Ensemble Kalman Filter: theoretical formulation and practical implementation. Ocean Dynamics, 2003. p. 343–367.

FARAGHER, Ramsey. Understanding the Basis of the Kalman Filter Via a Simple and Intuitive Derivation. IEEE Signal Processing Magazine, 2012. p. 128-132.

GIANNITRAPANI, Antonio, et al. Comparison of EKF and UKF for Spacecraft Localization via Angle Measurements. Ieee Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011. p. 75-84.

INVENSENSE. Invensense MPU-9150. [en línea].
<<http://www.invensense.com/products/motion-tracking/9-axis/mpu-9150/>> [citado en 29 de Marzo de 2016]

JULIER, Simon J y UHLMANN, Jeffrey K. New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems. Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition VI, 1997.

JULIER, Simon J y UHLMANN, Jeffrey K. Unscented Filtering and Nonlinear Estimation. Proceedings of the IEEE, 2004. p. 401–422.

KALMAN, Rudolf y BUCY, R. New results in linear filtering and prediction theory. Journal of Basic Engineering, 1961. p. 95-108.

KHODER, Wassim y JIDA, Bassem. A Quaternion Scaled Unscented Kalman Estimator for Inertial Navigation States Determination Using INS/GPS/Magnetometer Fusion. Journal of Sensor Technology, 2014. p. 101-117.

KLEEMAN, Lindsay. Understanding and Applying Kalman Filtering. Department of Electrical and Computer Systems Engineering Monash University, Clayton.

KURT-YAVUZ, Zeyneb y YAVUZ, Sirma. A Comparison of EKF, UKF, FastSLAM2.0, and UKF-based FastSLAM Algorithms, Computer Engineering Department, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey, 2012.

LACEY, Tony. Tutorial: The Kalman Filter [Tutorial: El Filtro de Kalman] En: Massachusetts Institute of Technology Web Literature. Capítulo 11. Massachusetts. p. 133-140.

LANGE, Antti A. Fast Kalman Processing of the GPS Carrier-Phases for Mobile Positioning and Atmospheric Tomography. Surveyors Key Role in Accelerated Development Eilat, Israel, 2009.

LAVIOLA, Joseph. A Comparison of Unscented and Extended Kalman Filtering for Estimating Quaternion Motion. Brown University Technology Center for Advanced Scientific Computing and Visualization, 2015.

LEHMANN, Erich Leo y CASELLA, G. Theory of Point Estimation. Segunda Edición, Nueva York, Springer, 1998.

LEVYS, H. The Extended Kalman Filter: An Interactive Tutorial for Non-Experts. [en línea]. <http://home.wlu.edu/~levys/kalman_tutorial/> [citado en 28 de Marzo de 2016]

LOONEY, Mark. A Simple Calibration for MEMS Gyroscopes. Analog Devices, EDN Europe, 2010. p. 28-31.

MCCONNELL, Steve. Code Complete, Microsoft Press, 1993, p.395.

MCELHOE, Bruce A. An assessment of the navigation and course corrections for a manned flyby of Mars or Venus. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions, 1966. p. 613-623.

MEMS EXCHANGE. MNX, MEMS and Nanotechnology Exchange. [en línea]. <<https://www.mems-exchange.org/MEMS/what-is.html>> [citado en 27 de Marzo de 2016]

META MOTION. Gypsy 5™ by Meta Motion. [en línea]. <<http://metamotion.com/>> [citado en 27 de Marzo de 2016]

MICROSOFT CORPORATION. Meet Kinect for Windows. [en línea]. <<https://dev.windows.com/en-us/kinect>> [citado en 27 de Marzo de 2016]

MITTER, Sanjoy K. Nonlinear Estimation. Massachusetts Institute of Technology. Department of Electrical Engineering and Computer Science. Laboratory for Information and Decision Systems, Cambridge.

MONFORT, Alain, et al. A Quadratic Kalman Filter. Crest Financial Economist Seminar, Banque de France, 2013.

NY Castings y GATT, Joe. Motion Capture Actors: Body Movement Tells the Story. [en línea]. <http://www.nycastings.com/dmxreadyv2/blogmanager/v3_blogmanager.asp?post=motioncaptureactors> [citado en 29 de Marzo de 2016]

NYQUIST, Harry. Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors. Physical Review Letters, Physical Review, and Reviews of Modern Physics, 1928.

PRIEMER, Ronald. Introductory Signal Processing. World Scientific, 1991. p. 1.

RAYMOND A, Kent. Estimation. Data Construction and Data Analysis for Survey Research, 2001. p. 157.

ROETENBERG, Daniel, et al. Compensation of Magnetic Disturbances Improves Inertial and Magnetic Sensing of Human Body Segment Orientation. IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, Vol. 13, no. 3, 2005.

SHAEFFER, Derek K. MEMS inertial sensors: A tutorial overview. IEEE Communications Magazine, 2013. p. 100-113.

SONG, C. Commercial vision of silicon based inertial sensors. Tech Dig 9th Intl. Conf Solid State Sensors and Actuators, 1997.

ŠPRDLÍK, Otakar. Detection and Estimation of Human Movement Using Inertial Sensors. Applications in Neurology, Czech Technical University in Prague, 2012.

STETZEL, Kirk D, et al. Electrochemical state and internal variables estimation using a reduced-order physics-based model of a lithium-ion cell and an extended Kalman Filter. Journal of Power Sources, Marzo 2015. p. 490–505.

ST-PIERRE, Mathieu y GINGRAS, Denis. Comparison between the unscented Kalman filter and the extended Kalman Filter for the position estimation module of an integrated navigation information System. Intelligent Vehicles Symposium, 2004

SZE, Simon M. Semiconductor Sensors. Wiley-Interscience, 1994. p. 13-18.

TAKEDA, Ryo, et al. Drift Removal for Improving the Accuracy of Gait Parameters Using Wearable Sensor Systems. Sensors, 2014.

TECHTARGET. Micro-electromechanical systems (MEMS). [en línea]. <<http://internetofthingsagenda.techtarget.com/definition/micro-electromechanical-systems-MEMS>> [citado en 30 de Abril de 2016]

TEREJANU, Gabriel A. Unscented Kalman Filter Tutorial. Department of Computer Science and Engineering, University at Buffalo, Buffalo, 2006.

THOMAS, R. Muscles of the Shoulder and Upper Arm. Illinois State University, 2013.

THRUN, Sebastian, et al. Probabilistic Robotics. The MIT Press. Cambridge, Massachusetts, 2006. p. 51-65.

TOLOEI, A. y NIAZI, S. Estimation of LOS Rates for Target Tracking Problems using EKF and UKF Algorithms- A Comparative Study. International Journal of Engineering Transactions, 2015. p. 172-178.

UICKER, J. J., et al. Theory of Machines and Mechanisms, Oxford University Press, New York, 2003.

UNIVERSITY OF MICHIGAN. Movements of the Upper Limb. Learning Modules - Medical Gross Anatomy. p. 1-18. [en línea]. <https://www.med.umich.edu/lrc/coursepages/m1/anatomy2010/html/modules/upper_limb_module/Module-UpperLimb.pdf> [citado en 28 de Abril de 2016]

WAN, Eric A. y VAN DER MERWE, Rudolph. The Unscented Kalman Filter. Oregon Graduate Institute of Science & Technology, Wiley Publishing, 2001.

WEN, Qingzhen, et al. Comparison of Filtering Techniques for Simultaneous Localization and Tracking. International Conference on Estimation, Detection and Information Fusion, ICEDIF, 2015. p. 387-392.

XIONG, N y SVENSSON, P. Multi-sensor management for information fusion: issues and approaches. Information Fusion, 2002. p. 163–186.

YAN, Xin. Linear Regression Analysis: Theory and Computing. World Scientific, 2009. p.1–2.

YAZDI, Navid, et al. Micromachined Inertial Sensors. Invited paper. Proceedings of the IEEE, Vol. 86, No. 8, 1998. p. 1640-1659.